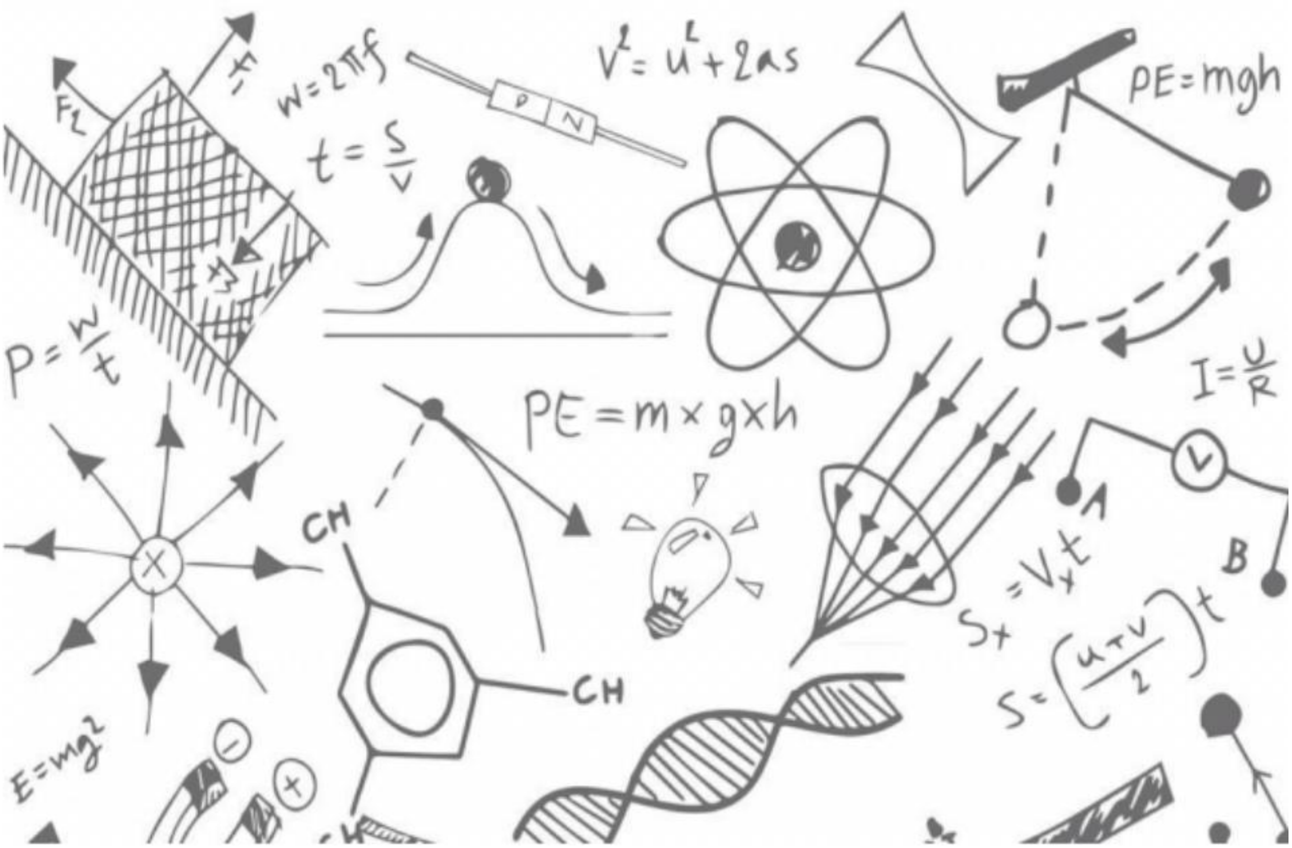
BIOFÍSICA

INGRESO A MEDICINA 2022

Facultad de Ciencias Médicas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO



Guía Teórico - Práctica para el Módulo Biofísica
Curso de Ingreso Facultad de Ciencias Médicas
UNSE

Presentada en cinco Unidades

1. Matemática
2. Mecánica Clásica
3. Fluidos
4. Termodinámica
5. Electricidad

Guía confeccionada por María del Rocío Cantero y Horacio F. Cantiello.

Actualizada por el Equipo Docente del Módulo de Física y Biofísica del Curso de Ingreso a la Facultad de Ciencias Médicas.

2022

BIOFÍSICA

Curso de Ingreso 2022

La primera clase de Biofísica debería definir los objetivos de la disciplina, y dejar claro cuál es su lugar y conexión con otras ciencias de la vida.

Podríamos aventurar entonces una definición dentro de las muchas definiciones actuales de Biofísica, tal vez la más general es la visualización de la Biofísica como la "ciencia que apunta a investigar la estructura y el funcionamiento de los sistemas vivos (en todos y cada uno de sus niveles organizativos) con la ayuda de los conceptos, teoría y metodología de la física experimental y teórica". En otras palabras, la Biofísica se define como “el estudio de los fenómenos biológicos mediante el uso de métodos y conceptos de la Física". En este sentido, la Biofísica tiene un lugar muy importante entre las Ciencias de la Salud, debido al enorme poder de los métodos físicos para abordar los procesos de la vida que, en esencia, obedecen a los fenómenos físicos que ocurren en los biosistemas.

La enseñanza de la Biofísica no es sólo una cuestión de una presentación de los temas biofísicos, sino también una cuestión de actitud y responsabilidad frente a esos conocimientos.

Cabe señalar también que, si bien algunos conceptos son comunes a los otros Cursos introductorios en Ciencias de la Vida, hay que tener en cuenta la naturaleza e impacto de la Biofísica en la comprensión de la estructura y funcionamiento de la materia. Esta comprensión tiene un poderoso instrumento para su estudio, la Física. La Biofísica también implica incorporar un gran número de conocimientos de Biología, Bioquímica, Matemáticas, Electrónica y Computación. Por lo tanto, la Biofísica no es una disciplina propia como la Genética, Bioquímica o la Biología Molecular, sino que promueve la interdisciplinariedad. Por lo tanto, estudiar Biofísica implica la necesidad de transportar el intelecto a través de las fronteras disciplinarias.

En síntesis, la Biofísica es la Física de la vida, donde la fisicoquímica y las matemáticas forman parte esencial de su lenguaje. Esta materia les permitirá comprender en profundidad cómo funcionan los seres vivos, se desarrollan, perciben las señales del medio ambiente, las procesan y responden a las mismas. Es la Biofísica base esencial para poder comprender posteriormente a la Fisiología Humana.

En este curso comenzaremos explicando algunos conceptos matemáticos útiles, mostrando por un lado los conceptos teóricos asociados a cada Unidad, proveyendo ejemplos prácticos resueltos y finalmente propondremos ejercicios para realizar en sus hogares y en clase.

Propósito del Curso

Brindar a los aspirantes conocimientos básicos biofísicos, y las disciplinas asociadas como la matemática y la química, que permitan explicar algunos fenómenos estudiados por las Ciencias Médicas.

Objetivos

Que los alumnos logren:

- Conocer y utilizar las herramientas matemáticas para comprender y utilizar los conceptos teóricos sobre los fenómenos físicos, para el conocimiento de las ciencias de la salud.
- Conocer e interpretar el significado, las limitaciones y el alcance de las leyes que rigen los fenómenos físicos.
- Interpretar y utilizar conceptos básicos de la física.
- Comprender y resolver ejercicios aplicables a las Ciencias Médicas, mediante el uso de las herramientas matemáticas adquiridas.

Unidad 1. Matemáticas
Contenidos

Herramientas Básicas

Notación científica y potencias de diez. Operaciones con potencias. Concepto de logaritmo. Propiedades de los logaritmos. Antilogaritmos. Despeje de ecuaciones. Suma y resta de fracciones. Mediciones.

Vectores

Concepto de vectores y funciones vectoriales.

Funciones

Función lineal. Función cuadrática. Parábola. Intersecciones de las funciones cuadráticas con el eje x. Raíces. Polinomios. Funciones exponenciales. Funciones logarítmicas. Nociones de Trigonometría. Triángulos. Razones Trigonométricas. Identidades trigonométricas importantes.

Nociones de derivadas e integrales

Nociones de cálculo. Derivadas. Concepto. Cálculo de máximo y mínimo. Área bajo la curva y concepto de funciones integrales. La Integral como Límite del Área. Ejemplos de Integral de Área.

Unidad 1: Matemáticas

Herramientas Básicas

Los conceptos matemáticos que se muestran en esta sección resultan indispensables para la comprensión de la biofísica. Deben ser ejercitados, ya que luego serán utilizados en la descripción de conceptos específicos que requieren el lenguaje matemático.

Notación científica y potencias de diez

En las mediciones biomédicas es frecuente trabajar con números muy grandes o muy pequeños. Es por este motivo que suelen ser expresados en **notación científica**. Por ejemplo, cuando pensamos que el radio de un átomo de hidrógeno es igual a 0,000000005 m, es más apropiado expresarlo en notación científica o utilizar submúltiplos de la unidad, lo que veremos luego.

La notación científica consiste en expresar cualquier número en potencias de 10. Una regla práctica para obtener la potencia de 10 adecuada es la siguiente:

a) Contar el número de lugares que debe trasladarse hacia la izquierda la coma decimal. Este número proporciona el exponente positivo de 10.

b) Contar el número de lugares que debe trasladarse hacia la derecha la coma decimal. Este número proporciona el exponente negativo de 10.

Para expresar números de muchas cifras se utiliza normalmente la forma de producto de las cifras significativas por una potencia de 10. Esto usualmente se conoce como notación científica, y en lugar de poner un número con ceros correspondientes a las cifras, se pueden utilizar potencias de 10 para simplificar su escritura y manejo.

Ejemplos:

1.000.000 = $1 \times 10^6 = 10^6$ (el exponente es positivo "6" dado que la coma que estaría a la derecha del cero marcado en rojo, debe correrse seis posiciones hacia la izquierda)
358.000 = $3,58 \times 10^5$ (nuevamente, el exponente es positivo "5" dado que la coma que estaría a la derecha del cero marcado en rojo, debe correrse cinco posiciones hacia la izquierda)
0,0000001 = $1 \times 10^{-7} = 10^{-7}$ (el exponente es negativo "-7" dado que la coma debe correrse siete posiciones a la derecha)
0,0000358 = $3,58 \times 10^{-5}$ (el exponente es negativo "-5" dado que la coma debe correrse cinco posiciones a la derecha)

En síntesis, siempre se deja una cifra significativa antes de la coma, y se acompaña el número resultante con un factor 10 elevado al exponente que sea igual al número de lugares que se ha corrido la coma. Recuérdese que siempre que el factor 10 esté potenciado por un número negativo, es un número menor que 1 (e. g. $10^{-1} = 0{,}1$). Como regla mnemotécnica, es bueno también recordar que la potencia a la que se eleva 10, representa el número de ceros de la cifra, de tal manera que 10^2 es el número 1 con dos ceros, en este caso, 100. El número 10^3 es 1 con tres ceros, o sea 1000 etc. Para valores menores que la unidad (1), el valor de la potencia es el número de posiciones de la cifra a la derecha de la coma, de forma tal que $2 \times 10^{-2} = 0{,}02$ (fíjense donde se ubica el número 2 respecto de la coma).

Operaciones con potencias

a) Para multiplicar varios números se multiplican primero las cifras significativas y luego se suman algebraicamente los exponentes de 10. Si es necesario, se ajusta la coma al final.

Ejemplos:

$3{,}2 \times 10^5 \times 4{,}1 \times 10^7 = 13{,}12 \times 10^{12} = 1{,}312 \times 10^{13}$

(Observen, se multiplica 3,2 y 4,1, dando 13,12. Luego se suman los exponentes 7 y 5, dando 12. Por último, se corre la coma una posición decimal para expresar correctamente el resultado). De modo análogo se procede con el siguiente ejemplo:

$$3{,}2 \times 10^5 \times 4{,}1 \times 10^{\;7} = 13{,}12 \times 10^{\;2} = 0{,}1312$$

b) Para dividir se opera análogamente, sólo que los exponentes deben restarse.

Ejemplos:

$$\frac{3{,}2 \times 10^5}{4{,}1 \times 10^7} = \frac{3{,}2}{4{,}1} \times \frac{10^5}{10^7} = 0{,}781 \times 10^{\;2} = 7{,}8 \times 10^{\;3}$$

$$\frac{3{,}2 \times 10^5}{4{,}1 \times 10^{\;7}} = \frac{3{,}2}{4{,}1} \times \frac{10^5}{10^{\;7}} = 0{,}781 \times 10^{12} = 7{,}8 \times 10^{11}$$

c) Para elevar un número a una potencia determinada, se elevan a esta potencia las cifras significativas y se multiplican los exponentes de 10 por el exponente de la potencia.

Ejemplo:

$$(4 \times 10^5)^3 = 4^3 \times (10^5)^3 = (4 \times 4 \times 4) \times \left(10^5 \times 10^5 \times 10^5\right) = 64 \text{ x } 10^{15} = 6{,}4 \times 10^{16}$$

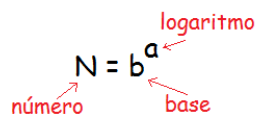
Las raíces se consideran potencias de exponentes fraccionarios. De este modo, la raíz cúbica supone elevar a 1/3. Antes de operar se procura correr la coma del radicando, de modo que el exponente de 10 sea múltiplo del índice.

$$\sqrt[3]{6{,}4 \times 10^7} = \sqrt[3]{64 \times 10^6} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{10^6} = 4 \times 10^2 = 400$$

Concepto de logaritmo

Para continuar con el uso de cifras con forma reducida, es común utilizar los logaritmos. Por ejemplo, la cifra un millón, 1.000.000 es igual a escribir 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 lo que es igual a escribir 10^6. El valor del logaritmo en base 10 de 1.000.000 es 6. Es decir, el logaritmo es el número al que tenemos que elevar 10 para obtener 1.000.000. En este caso, la respuesta es 6.

Definimos por lo tanto al logaritmo de un número como el exponente (a) al que hay que elevar la base (b) para que dé un número (N) determinado. Usamos la misma base para todos los números, y lo único que cambiamos es su exponente. Todo logaritmo es un exponente



Ejemplo,

$\mathrm{N} = 64; b = 4$

Entonces el $\log_4 64 = 3$, dado que debemos elevar al cubo (^{3}) al número 4 para obtener el valor 64.

Generalmente las bases más usadas son los números e = 2,718... y el número 10. Los logaritmos en base *e* se llaman Neperianos (viene de Napier) o naturales, y se representan por el símbolo *ln*. Los logaritmos en base 10 se llaman decimales, y se representan por log o Lg. Salvo indicarlo expresamente, siempre utilizamos los logaritmos decimales.

Por ejemplo, el

$log\ 100 = 2; \quad log\ 1000 = 3$

Notar que si los expresáramos en notación científica el valor del logaritmo se hace más evidente:

$log\ 10^2 = 2; \quad log\ 10^3 = 3$

Otros ejemplos: **N**	**log**
$1000 = 10^3$	3
$100\ 000 = 10^5$	5
$0,001=10^{-3}$	-3
$0,00001=10^{-5}$	-5

Si el número es potencia de 10, el logaritmo es entero e igual al exponente. Si el *log 10 = 1* y el *log 100 = 2*; al ser veinte un número intermedio entre 10 y 100, su logaritmo será mayor que 1 y menor que 2, en este caso, 1,3.

Propiedades de los logaritmos

a) El logaritmo de la base es siempre la unidad,

$$\ln e = \ln e^1 = 1$$

$$\log 10 = \log 10^1 = 1$$

b) el logaritmo de la unidad (o sea la potencia cero del número) en cualquier base es siempre cero

$$\log_b 1 = \log_b b^0 = 0$$

c) el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, dado que es el producto de una suma de potencias de igual base.

Ejemplos:

$$\log (a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log (10^8 \times 10^5) = \log 10^8 + \log 10^5 = \log 10^{8+5} = 8 + 5 = 13$$

d) del mismo modo, el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de dividendo y divisor.

Ejemplos:

$$\log \frac{a}{b} = \log a \quad \log b$$

$$\log \frac{10^8}{10^5} = \log 10^8 \quad \log 10^5 = \log 10^{8\ \ 5} = 8 \quad 5 = 3$$

o bien

$$\log \frac{10^8}{10^5} = \log 10^3 = 3$$

e) el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

log a^6 = 6 log a

$$\log a^6 = 6 \times \log a$$

$$\log\left(10^{8}\right)^{5} = 5\times\log\left(10^{8}\right) = 8\times 5 = 40$$

o bien

$$\log\left(10^{8}\right)^{5} = \log\left(10^{8\times 5}\right) = log\,10^{40} = 40$$

f) Análogamente, el logaritmo de una raíz es igual al cociente del logaritmo del radicando por el índice.

Ejemplos:

$$\log\sqrt[6]{a} = \frac{log\ a}{6}$$

$$\log\sqrt[5]{10^{8}} = \frac{log\,10^{8}}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

o bien

$$\log\sqrt[5]{10^{8}} = log\,10^{\frac{8}{5}} = log\,10^{1,6} = 1{,}6$$

Antilogaritmos

Se llama antilogaritmo, al número que corresponde a un logaritmo dado. Se representa como antilog.

Ejemplos:

antilog 5=10^{5} *= 100.000;* En efecto: *log 100.000 = 5*

antilog (-3)= 10^{-3} *= 0,001;* En efecto: *log 0,001 = -3*

antilog 4,3 = 20.000; En efecto: *log 20.000 = 4,3*

Despeje de ecuaciones

Es importante saber despejar ecuaciones. Para ello, sólo hay que recordar algunas pocas cosas:

1 - Lo que está sumando pasa restando
2 - Lo que está restando pasa sumando
3 – Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4 - Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5 - Lo que está como potencia pasa como raíz
6 - Lo que está como raíz pasa como potencia

Siempre hay que ser cuidadoso en qué se pasa primero. Como regla general, cuánto más directamente afecte a x, más tardará en pasar al otro lado de la ecuación. Por ejemplo, primero pasan las sumas y restas, y luego lo que multiplica o divide directamente a x, y por último las potencias o las raíces. Algunos ejemplos que veremos a continuación, colaborarán en la comprensión.

Despejar x significa simplemente que x quede sola a alguno de los dos lados del signo igual. Algunos ejemplos de cómo hacerlo correctamente, en orden creciente de complejidad:

1) $5 + x = 10$

Se espera que x quede "sola". Para lograrlo se debe pasar el 5 al miembro derecho. Como "suma", pasa "restando".

$x = 10 - 5$

2) $4 = \frac{8}{x}$

Para dejar a la x "sola", primero hay que pasarla al numerador. Como x está dividiendo, pasa al otro lado multiplicando: $4 \times x = 8$

El cuatro está multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo: $x = \frac{8}{4}$

3) $x^2 = 25$

La x está al cuadrado. Este cuadrado pasa al otro lado como raíz: $x = \sqrt{25}$

4) $4 + 2x^2 = 20$

Acá comenzamos a tener ecuaciones con más operaciones. Primero identifiquemos lo primero que hay que pasar. El cuatro suma a $2x^2$, mientras que el 2 sólo multiplica a la x^2, y el cuadrado (^{2}) sólo afecta a la x. Por lo tanto, deben pasar en ese orden, primero el 4, luego el 2 y finalmente el cuadrado. Entonces:

Primero pasa el número que está sumado, restando: $2x^2 = 20 - 4$

Luego pasa el número que está multiplicando, dividiendo: $x^2 = \frac{16}{2}$

Y por último pasa el exponente cuadrado como raíz: $x = \sqrt{\frac{16}{2}}$

5) $\frac{4 + 2x^2}{10} = 20$

Nuevamente debemos seguir el razonamiento anterior. El 10 divide a $4+2x^2$, el 4 suma a $2x^2$, el 2 multiplica a x^2, y el cuadrado sólo afecta a la x. Por lo tanto, pasan en ese orden (primero siempre lo que afecte a más "cosas").

Primero pasa multiplicando el 10 que está dividiendo: $4+2x^2=20\times10$

Luego, sigue el 4 que está sumando, que pasa restando: $2x^2=(20\times10)-4$
(Notar que el 4 pasa restando a TODO lo que ya se había puesto a la derecha, por eso 20 x 10 ahora aparece entre paréntesis).

Ahora, pasa dividiendo el 2 que multiplicaba: $x^2=\dfrac{(20\times10)-4}{2}$

Y finalmente, pasa el cuadrado como raíz: $x=\sqrt{\dfrac{(20\times10)-4}{2}}$

6) $3\times(2x+5)^2=30$

Volvamos a practicar. El 3 multiplica a $(2x+5)^2$, luego el cuadrado afecta a $2x+5$, el 5 suma a 2x y el 2 sólo afecta a la x. Por lo tanto, pasa en ese orden:

El 3, pasa dividiendo: $(2x+5)^2=\dfrac{30}{3}=10$

El cuadrado pasa como raíz: $2x+5=\sqrt{10}$

El 5 pasa restando: $2x=\sqrt{10}-5$

Y el 2 pasa dividiendo: $x=\dfrac{\sqrt{10}-5}{2}$

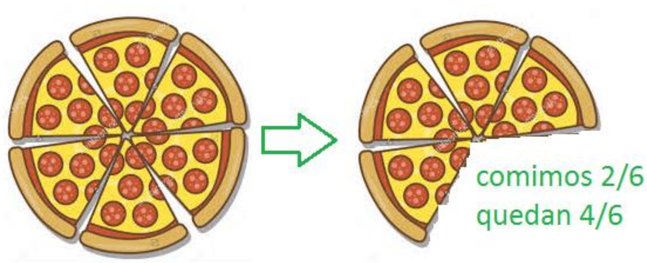
Nótese que cada número que pasa afecta a todos los números que estaban a la derecha del signo igual. Use paréntesis y corchetes para no confundirse en estos pasajes.

Suma y resta de fracciones

Una fracción es un número que expresa una cantidad determinada de porciones que se toman de un todo dividido en partes iguales. Se representa con una barra oblicua u horizontal que separa la primera cantidad (el numerador) de la segunda (el denominador). El siguiente ejemplo indica

$$\frac{2^{\text{numerador}}}{6_{\text{denominador}}}$$

que de un total de seis partes idénticas, tomamos 2. Por ejemplo, si comemos 2 porciones de una pizza con seis porciones, entonces comimos 2/6 de la pizza:



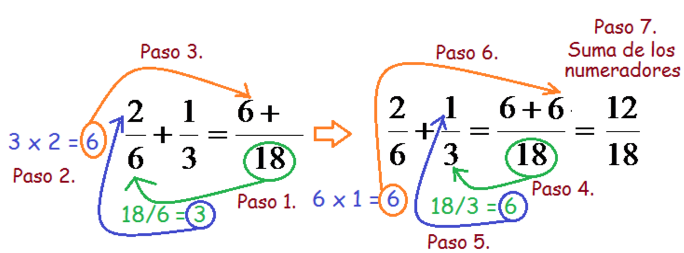
Si queremos sumar (o restar) fracciones, por ejemplo, $\frac{2}{6}+\frac{1}{3}$, se debe hacer lo siguiente. Primero trazamos una línea para separar al numerador del denominador:

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{}{}$$

Abajo de la línea de fracción colocamos el mínimo común múltiplo. En este caso sería 6 (dado que 6 es múltiplo de ambos, 3 y 6). A veces no nos damos cuenta fácilmente cuál es ese mínimo común múltiplo, y en ese caso lo más fácil es simplemente multiplicar ambos denominadores. En este caso tenemos 6 x 3 = 18:

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{}{6\times 3}=\frac{}{18}$$

Luego completamos el numerador. ¿Cómo? Dividimos el común denominador (18 en este ejemplo) por cada uno de los numeradores, y al valor obtenido lo multiplicamos por cada numerador de la suma. Por ejemplo, 18/6 = 3, multiplicado por 2 = 6; 18/3 = 6, multiplicado por 1 = 6). Esquemáticamente:



Simplificando, dado que tanto el numerador como el denominador son múltiplos de 6:

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

Introducción

La física, en su intento de describir los hechos de la naturaleza, utiliza las matemáticas como su lenguaje universal. Las funciones serán de particular interés dado que contienen la idea de “relación” o “dependencia” entre distintas variables, permitiendo relacionarlas, lo que veremos a lo largo de este curso.

Fundamentos teóricos

Llamaremos función de A en B a una relación "f" (o cualquier otra letra) que a cada elemento x de A le haga corresponder un único elemento y de B.

Por este motivo, cuando hablemos de una función “y” que dependa de “x”, la denotaremos y = f(x).

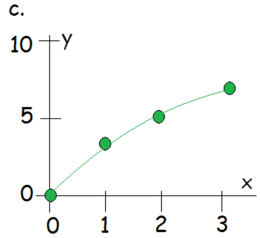
a.

$f(x) = 2x+1$

b.

x	y
0	0
1	3
2	5
3	7

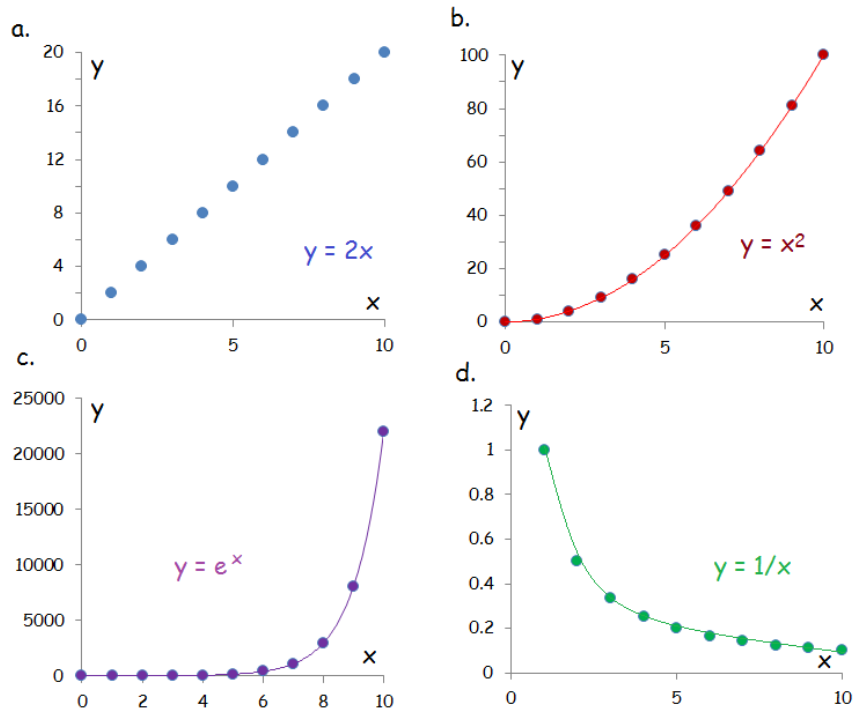
c.

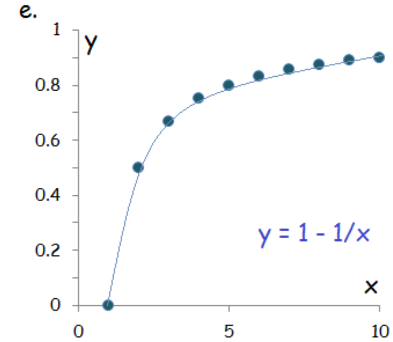


Este concepto de función lo podemos graficar, o representar de diversas maneras, tales como se muestra a continuación.

Funciones. En la figura se muestran distintas formas de representar funciones, mediante una ecuación (a.), una tabla (b.) y un gráfico (c.).

Cuando se realizan distintas mediciones, y se busca explicar lo observado mediante alguna función, se usan particularmente con frecuencia las formas (b.) y (c.). Por ejemplo, los datos obtenidos en un experimento se presentan tabulados de modo que a cada valor de "x" de una variable independiente le corresponde un valor "y" de la variable dependiente (será independiente aquella variable a la que le podamos dar cualquier número, y será la variable dependiente aquella cuyo valor depende del valor de la variable independiente). También es usual graficar los valores obtenidos (c.) lo que facilita observar visualmente la función. Estos gráficos son también llamados “gráficos de dispersión”.





Gráficos de funciones. Se muestran 5 gráficos, que corresponden a una función lineal (a.), cuadrática (b.), exponencial (c.), y racional (d. y

¿Qué es una “variable”? Lo explicaremos desde el punto de vista intuitivo, como su nombre lo dice, una variable es algo que varía. Por ejemplo, si midiéramos en qué posición está el sol a distintas horas del día, las horas del día constituyen una variable (dado que irá desde las 0 hasta las 24 hs, y la posición del sol es también una variable).

Reconocimiento de la forma gráfica de algunas funciones básicas.

Lo graficado en la figura anterior representa funciones que no necesariamente están asociadas a alguna ley física. Por ello, en los ejes x (eje de las abscisas) e y (eje de las ordenadas) solamente se escribieron los números, sin magnitudes ni unidades. De esta forma, estas representaciones, carecen de valor físico. Es muy importante destacar que los gráficos que representan variables biomédicas deben obligatoriamente indicar en los ejes las variables en estudio y sus unidades de medición.

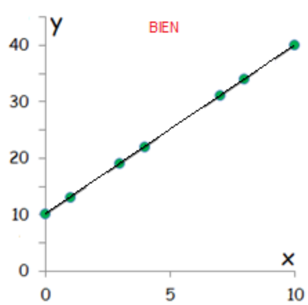
Instrucciones generales para la confección de un gráfico

Los gráficos idealmente se confeccionan sobre papel milimetrado, logarítmico o semi-logarítmico, según sea conveniente, aunque manteniendo adecuadamente las proporciones, siempre se puede obtener una primera aproximación simplemente con un lápiz y un papel.

En general siempre es conveniente graficar primero en papel milimetrado, espaciando correctamente los intervalos en la escala “y” (ordenada) y en la escala “x” (abscisa). Si el gráfico resulta aproximadamente una línea recta, entonces la relación entre las variables "x" e "y" es lineal (ver Fig.), es decir de la forma sencilla:

$$y = mx + b$$

Función lineal. La relación sigue la función y = mx + b, donde m es la pendiente de la recta y b, la ordenada al origen. Particularmente, en esta función y = 3x + 10. Observe en el ejemplo el gráfico de la izquierda. El eje x se ha dividido en intervalos regulares de a 5 unidades (esto es una escala), mientras que el eje y se ha dividido en intervalos de 10 unidades (otra escala). Cada punto de ubicó en la intersección (x,y) correspondiente sin indicar el valor particular que representa (a diferencia de lo que se muestra en el gráfico mal confeccionado de la derecha).



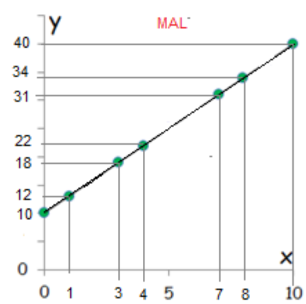


Gráfico de función lineal. Obsérvese que la representación de la izquierda está correctamente graficada, mientras que la de la derecha (gráfico mal realizado) carece de escala y se indican los valores de cada medición. Si bien los puntos están bien interceptados en los ejes, no es la forma correcta de mostrar los datos.

Si la representación de los datos no es una recta, es posible construir una relación lineal, transformando las variables. Muchas veces, esto es muy útil dado que trabajar con relaciones lineales es más sencillo.

A partir del gráfico lineal se pueden obtener las constantes m y b, para cada función, lo que veremos más adelante.

Ahora, que ya hemos visto algunas funciones de modo general, mencionaremos lo que se debe tener en cuenta a la hora de graficar:

1. El gráfico debe llevar un título o una leyenda que indique lo que representa y sirva de guía a quien haga uso de él.

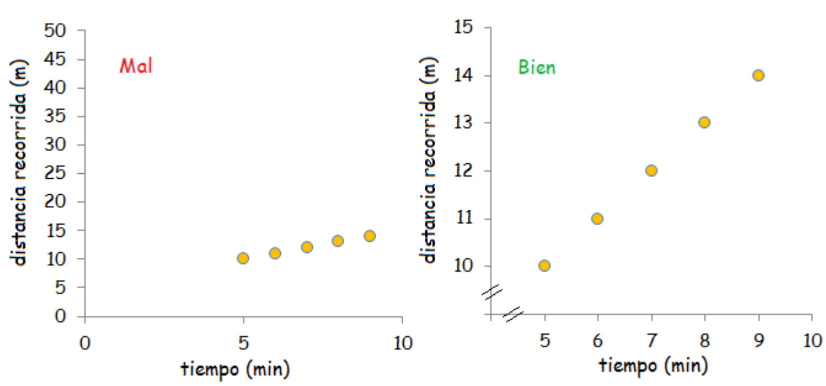
2. Sobre los ejes se deben indicar las magnitudes físicas que en ellos se representan con sus correspondientes unidades y sus escalas adecuadas.

3. Usualmente la variable independiente se representa en el eje de la abscisa (x) y la variable dependiente en el eje de la ordenada (y).

4. Se debe elegir una escala, lo cual requiere invertir un poco de tiempo para que la misma sea adecuada. Para ello se recomienda:

a. Que la escala permita observar los puntos representados con un formato proporcional. En la mayoría de los casos cuanto más se aproxime el gráfico a una proporción cuadrada, mejor.
b. Para una correcta visualización e interpretación de la información, los puntos deben estar separados. Para lograr esto se debe prestar atención a la escala elegida. La misma debe ser adecuada para que los puntos graficados se distribuyan separadamente, sin generar zonas donde los puntos estén todos juntos y zonas con completa ausencia de los mismos. Muchas veces se debe ampliar la escala, cortando parte de los ejes, como se muestra en la Fig. de abajo. Además, se debe evitar que las escalas elegidas sean de lectura complicada, se debe pensar cuál será la escala que hará más fácil la lectura de los datos.

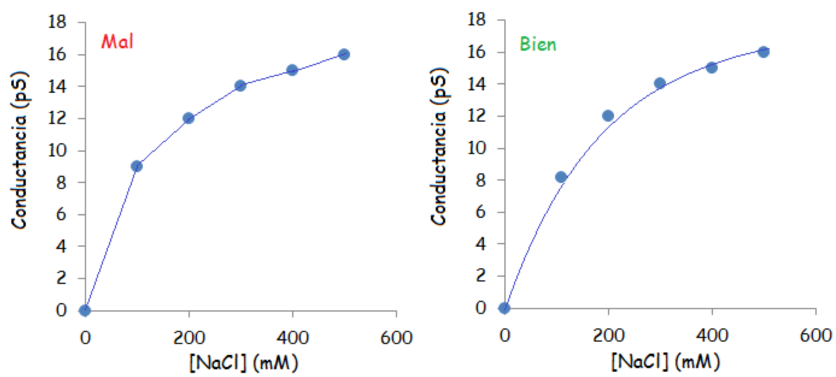
Espaciar correctamente los intervalos en las escalas, significa que, en una escala lineal, la misma longitud representa siempre el mismo valor. Por ejemplo, en la Fig. siguiente, la distancia entre 0 y 5 en el eje x, es la misma que entre 5 y 10 (es decir, que esa distancia representa siempre 5 unidades). En el eje y, una distancia menor, representa 5 unidades también, y esta distancia se mantiene a lo largo de todo el eje y.



Elección y maximización de la escala. En ambos gráficos, los valores graficados son los mismos. Sin embargo, observe que a la izquierda se observa los puntos experimentales sólo en el extremo inferior derecho del cuadrante, lo que no permite visualizar correctamente los datos. Además, la escala elegida, dificulta individualizar el valor de “x” e “y” para cada punto. Nótese la buena apreciación de los puntos que puede hacerse en el gráfico de la derecha. En este gráfico, las líneas al principio de los ejes, indican que los mismos se cortaron entre 0 y el primer número indicado en el eje (10 para el eje “y”, y 5 para el eje “x”). Note además, que la proporción es cuadrada, y se colocaron las magnitudes y unidades en ambos ejes (distancia recorrida en metros, y tiempo en minutos).

Note en la figura anterior que la distancia que separa a 5 de 6, a 6 de 7 etc., en el eje x del gráfico de la derecha es siempre la misma. Lo mismo se cumple para el eje y. Verifique siempre, que los ejes tengan las magnitudes y unidades correspondientes.

c. Para aproximar o trazar una línea de tendencia de una función, no deben unirse los puntos experimentales por medio de segmentos rectos. La línea de tendencia debe construirse con una curva suave, con la forma que mejor se aproxime a los puntos experimentales (ver Fig. siguiente).



Línea de tendencia. Obsérvese que en el gráfico de la izquierda, los puntos están simplemente unidos por líneas rectas, lo que no representa una línea de tendencia apropiada. En el gráfico de la derecha, los mismos puntos se aproximaron con una línea suave que muestra una buena aproximación a los puntos experimentales.

Note nuevamente, que las proporciones del gráfico son aproximadamente cuadradas, y que cada eje tiene la magnitud y la unidad. Además, note, que la línea de tendencia de la Fig anterior, derecha, no pasa por todos los puntos, sino que es simplemente una buena aproximación a la mayoría de los puntos experimentales.

Es muy común que los gráficos de datos obtenidos no se correspondan perfectamente con ninguna función, si bien se pueden aproximar a alguna. En estos casos, se toma la línea de tendencia que mejor represente los datos. Cuando se trata de tendencias lineales, la mejor aproximación se puede estimar por cuadrados mínimos. Para los fines de este curso, simplemente se tomará la mejor recta a “ojo”.

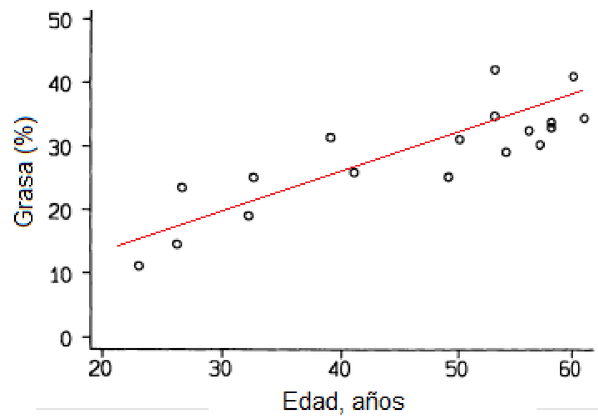


Gráfico de datos reales. Nótese que cada eje tiene las magnitudes y unidades, y que los puntos siguen una tendencia lineal que no es perfecta (no todos los puntos caen robre la recta, de hecho en este caso en particular, ninguno lo hace).

Análisis de un gráfico

Analizaremos a continuación cómo determinar la relación funcional entre variables experimentales, cuando tenemos una serie de mediciones que hemos realizado nosotros, u otras personas. Los pasos recomendados son los siguientes:

1) Colocar los datos en una tabla.
2) Graficar los datos. El gráfico puede mostrar:
a. Una relación lineal (línea recta).
b. Una relación no lineal (distinta de una recta).
3) Para el caso (b.), muchas veces es conveniente hacer alguna transformación matemática que convierta al gráfico en una relación lineal, de tal forma de que sea simple la interpolación y obtener distintos parámetros. Por ello, como dijéramos al principio, muchas veces se grafica en escalas logarítmicas.
4) Se escribe la ecuación de la recta, determinando el valor de las constantes

Una vez que ya sabemos cuál es la relación, y particularmente, si la misma fuera una recta, podremos obtener los parámetros de la misma. Para una función lineal, dijimos que

$$y = mx + b$$

Donde, “y” es la variable dependiente y “x” es la variable independiente, m y b son constantes. La letra m, representa la pendiente de la recta, y b la ordenada al origen.

Ajuste Lineal

De acuerdo a lo recién explicado, si las variables “x” e “y” muestran una relación aproximadamente lineal, la tarea de encontrar una recta que pase por todos y cada uno de los puntos es normalmente una tarea imposible, puesto que en general los valores obtenidos experimentalmente, no caen todos exactamente sobre una recta. Lo que sí podemos hacer fácilmente es obtener la mejor recta posible, para lo cual existen distintos métodos de regresión que escapan a los fines de este curso. De todos modos, lo que haremos será trazar a “ojo”, la recta que consideremos aproxima bien los puntos experimentales. Esta recta deberá aproximarse a la mayor cantidad de puntos experimentales.

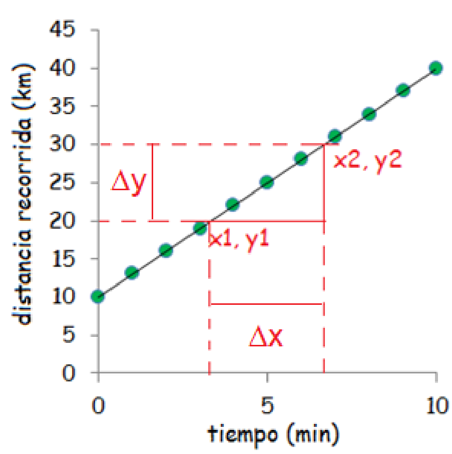
Para determinar la pendiente m y la ordenada al origen b, podemos aplicar el siguiente método gráfico, luego de trazar la mejor recta posible:

a. La ordenada al origen, la podremos obtener por la intercepción con el eje “y”.
b. La pendiente, la podremos obtener, tomando dos puntos “x” e “y”, y a partir de ellos calcular m como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observemos la siguiente Fig.

Note que tanto la pendiente como la ordenada al origen calculadas para el siguiente gráfico, tienen las unidades correspondientes

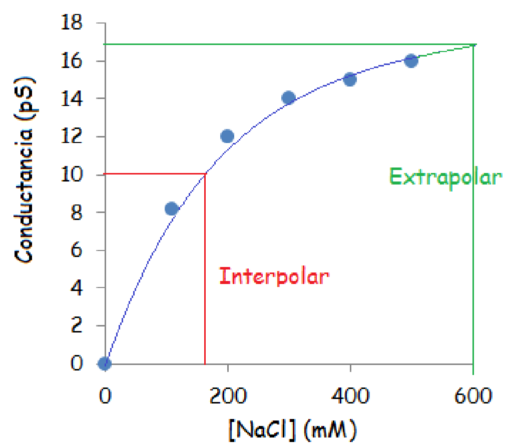


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{(30 - 20)\ km}{(6{,}7 - 3{,}3)\ min} = \frac{10\ km}{3{,}4\ min} = 2{,}94\ km/min$$

Cálculo de la pendiente de una recta. En el método gráfico, se deben elegir dos pares de puntos, “x” e “y”, cualesquiera de la recta trazada, y se calcula la pendiente m como se muestra en la figura. La ordenada al origen, se puede obtener mediante la intercepción de la línea de tendencia con el eje de las ordenadas. En este caso, el valor es de b = 10 km.

La aproximación de los puntos por la función que mejor los aproxime, permite inferir el valor de zonas donde no se han realizado mediciones. Por ejemplo, si observamos la Fig.

que precede a la anterior, veremos que no se han realizado mediciones cuando la concentración de NaCl es de 175 mM. Sin embargo, si miramos en la curva que aproxima a la función, podremos estimar que a 175 mM, la conductancia sería de aproximadamente 10 pS (pico-Siemens). Cuando buscamos un valor de “y” para un valor de “x”, dentro del rango de medición, estamos interpolando. Si por ejemplo, quisiéramos saber cuál es la conductancia en 600 mM de NaCl, deberíamos extrapolar su valor. Es decir, asumir que el comportamiento seguiría siendo el predicho por la función (una vez conocida, o sugerida por la tendencia de la curva), y buscar su valor numérico.



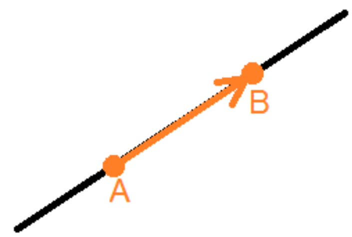
Interpolación vs. extrapolación. Se puede observar en el gráfico, que cuando buscamos un valor de “y” para un determinado valor de “x”, dentro del rango medido (que va de cero a 500 mM en este caso), estamos interpolando. En el ejemplo, se interpoló la conductancia para 175 mM NaCl, que da aproximadamente 10 pS de conductancia. En contraste, cuando se busca el valor de “y” para un valor de “x” fuera del rango medido, se extrapola, asumiendo que la función seguirá la tendencia de los datos previamente obtenidos. En el ejemplo, se siguió la tendencia (curva verde a continuación de la línea azul) y se extrapoló el valor de conductancia para NaCl 600 mM (aproximadamente 17 pS).

Vectores

Existen cantidades tales como el tiempo, la temperatura, la masa de una sustancia, la cantidad de tejas para cubrir un techo que simplemente con su magnitud y unidad (30°C, 200 g, 1500 tejas) están completamente definidas. Este tipo de magnitudes son magnitudes escalares. Existen otras, muy comunes en la física que requieren la definición de dirección y sentido (imagínense, simplemente una flecha). Estas magnitudes se conocen como magnitudes vectoriales. Supongamos que Uds. se pierden en una ciudad desconocida y preguntan a un transeúnte a qué distancia están del hotel donde se hospedan durante esos días. Si el transeúnte les dice a 1000 metros, y simplemente se va, probablemente nunca sepan si deben dirigirse hacia el norte, hacia el sur, al este o al oeste. Es decir, para que la información sea útil, además de decirles el valor de la distancia debe decirles hacia dónde dirigirse (la punta de la flecha…).

Se llama vector al segmento (orientado) que representa a una magnitud con dirección y sentido, además de la magnitud.

En la siguiente Fig. se muestra un vector:



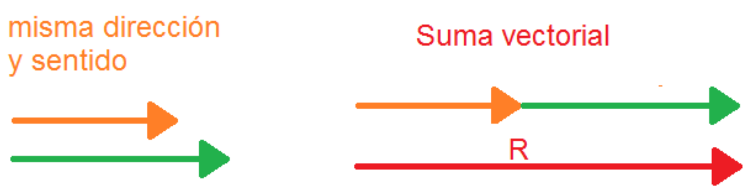
Elegimos dos puntos sobre la recta que llamamos A y B, siendo A el origen y B es el extremo (hacia dónde apunta la flecha). Entonces, tenemos un segmento orientado, es decir, el vector

El sentido está dado por la flecha, mientras que la dirección está dada por la recta. El vector, que llamaremos AB es entonces magnitud vectorial, tiene una magnitud (módulo), dada por la longitud del segmento, una dirección (dada por la recta) y un sentido (dado por la flecha).

Suma de vectores

Para sumar vectores, tendremos en cuenta su módulo (su longitud), su dirección, y su sentido. Veremos aquí el método gráfico, que será el único que veremos en este módulo.

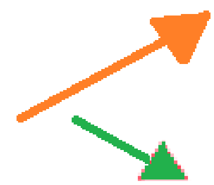
Veremos distintos casos, el primero y más sencillo es la suma de dos vectores de idéntica dirección (paralelos) y sentido. Cuando este es el caso, lo que se hace simplemente es colocar a los vectores en la misma recta, uno a continuación del otro, se suma el valor de los segmentos y se calcula así la resultante (R), como se muestra a continuación.



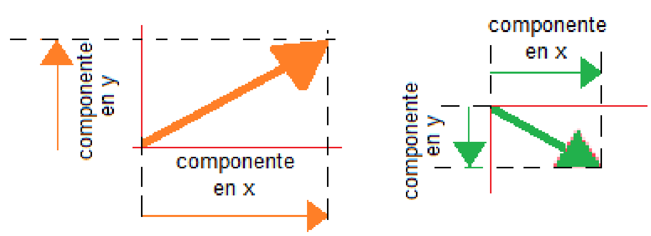
Si el vector naranja tuviera un módulo de 3 y el verde, 4, entonces el módulo resultante sería simplemente la suma de los dos, con un valor de 7.

Veamos ahora qué ocurre con la suma de dos vectores de idéntica dirección (paralelos) pero sentido contrario. Cuando este es el caso, colocamos a los vectores uno debajo del otro, y trazamos como resultante a la diferencia entre un vector y el otro. El sentido estará dado por el vector de mayor módulo.

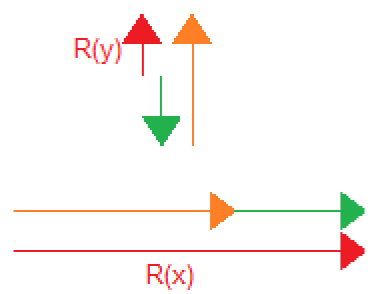
Luego, quedan los casos donde los vectores no tienen la misma dirección. Para resolver estos casos, lo que se hace es descomponer al vector en sus componentes en los ejes x e y. Comencemos viendo las dos fuerzas que queremos sumar, que se muestran a la derecha.



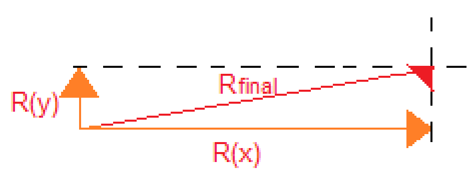
Ahora, vamos a descomponer a cada una de ellas en sus componentes en los ejes x e y, es decir que vamos a ubicar a los vectores en un sistema de ejes cartesianos similar al que utilizábamos para los gráficos.



Luego, procedemos a sumar los componentes en y, y en x, de la misma forma que lo hacíamos para los dos primeros ejemplos:

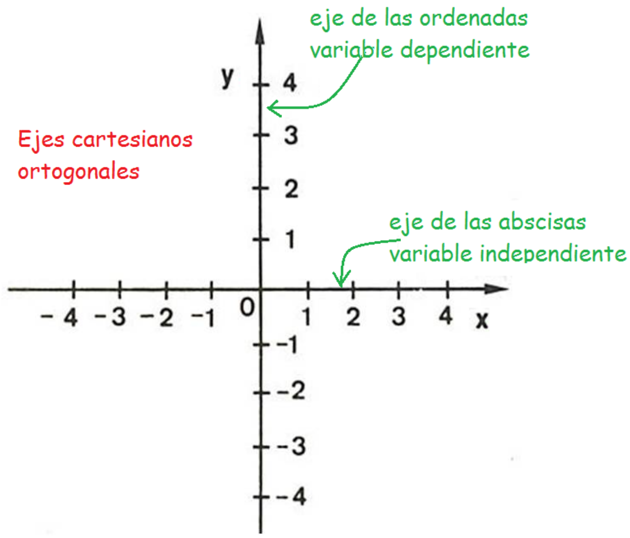


Una vez obtenidas las resultantes en x (R(x)) y en y (R(y)), lo que hacemos es colocarlas de forma ortogonal, y sacamos la resultante final como se muestra en la Figura:



Funciones

Las funciones son, en palabras sencillas, relaciones entre una variable y otra. A la variable que es independiente (lo que clarificaremos en ejemplos) la llamaremos "x", y a la variable que depende de x, la llamaremos "y". Las relaciones entre x e y pueden representarse mediante tablas, gráficos o ecuaciones. Comúnmente los datos fisiológicos los verán graficados en ejes cartesianos ortogonales, donde la variable x se grafica en el eje de las abscisas y la variable y en el eje de las ordenadas.



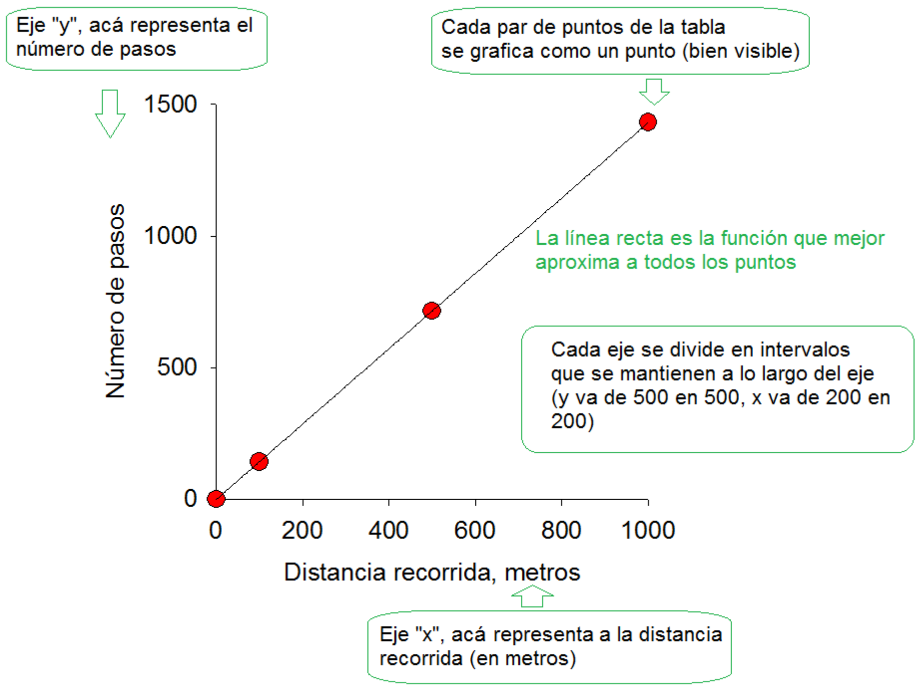
Veremos algunas de estas relaciones, que serán de uso extendido en las Ciencias Médicas.

Función lineal

La función lineal, puede considerarse la relación más sencilla que se puede encontrar entre x e y. Se llama lineal, justamente porque su gráfica es una línea recta. Por ejemplo: Un estudiante de Ciencias Médicas asistió al curso de ingreso. Para llegar hasta el aula caminó de forma constante desde su casa hasta la Facultad. Contó los pasos que dio para recorrer la distancia que separa su casa desde la facultad y registró en un cuaderno los siguientes valores:

Distancia, metros	Cantidad de pasos
0	0
100	143
500	715
1000	1430

Luego, los graficó en un sistema de ejes cartesianos (los que seguramente aprendiste en la escuela). Es decir que al recorrido de 100 metros (en x), le corresponden 143 pasos en y, y así sucesivamente. Para graficar estos resultados, primero hay que definir escalas en los ejes. Dado que en general nuestras escalas serán lineales, deberemos crear intervalos equidistantes y regulares. Por ejemplo, en este caso el eje x irá de 0 a 1000 (ver los números en la Tabla), entonces, podemos hacer intervalos de a 200 m, y para la cantidad de pasos (eje y) construiremos un eje que vaya desde 0 hasta 1500 (ver valores de la tabla) dividido en intervalos de a 500. Veamos debajo cómo quedaría el gráfico.



Noten lo siguiente, la relación entre x e y, es aproximada perfectamente por una línea recta. Esto significa que para estas mediciones, la función que mejor se aproxima a los datos es la función lineal. ¡Así de sencillo!

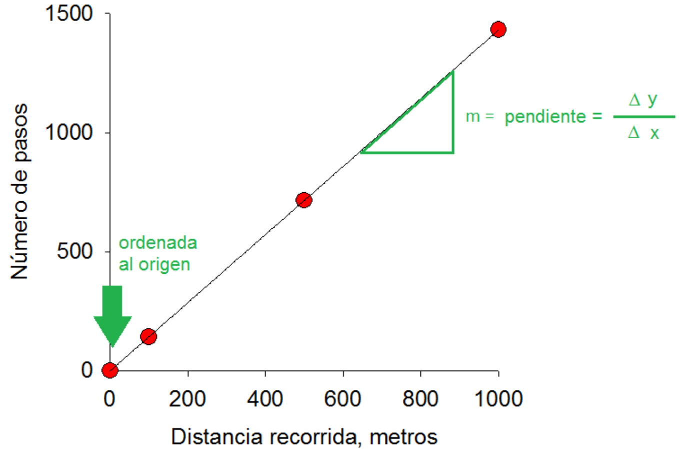
Matemáticamente escribiremos a la función lineal como:

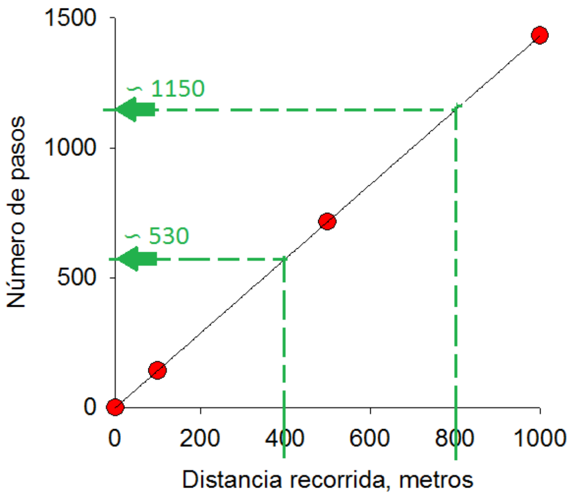
$$y = m \times x + b$$

En nuestro caso puntualmente podríamos reemplazar x e y por lo que verdaderamente representan:

$$N° \; de \; pasos = m \times \text{distancia} \quad \text{recorrida} + b$$

Siendo "m" un número que representa la pendiente de la recta, y b la ordenada al origen (es decir, el valor de y cuando x = 0):





En este caso, si quisiera calcular m, podría hacerlo así, interpolamos en el gráfico (líneas verdes) dos puntos cualquiera que caigan sobre la recta: en este caso elegimos $x_1 = 400$ y $x_2 = 800$, y nos fijamos los valores que les correspondes en y, que serían $y_1 = 530$, $y_2 = 1150$.

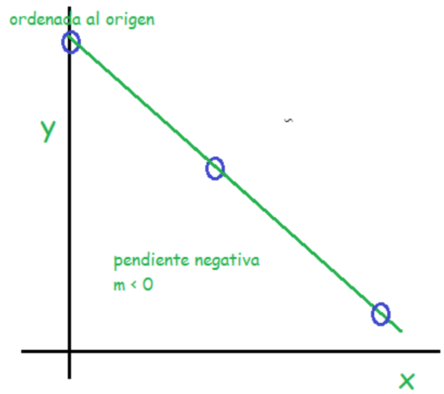
De este modo, calculamos m = Δy/Δx, como sigue:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(1150 - 530)\,pasos}{(800 - 400)\,metros}$$

$$m = \frac{620\ pasos}{400\ metros} = \frac{620\ pasos}{400\ metros} = 1{,}55\ \frac{pasos}{metro}$$

NOTA: Cuando las observaciones son experimentales, es usual que los valores no caigan exactamente sobre la recta, debido al error experimental y la variabilidad. El concepto de error y variabilidad lo veremos brevemente al finalizar esta Unidad.

En general, si la función tiene una pendiente negativa, el gráfico será como el que se muestra a continuación.



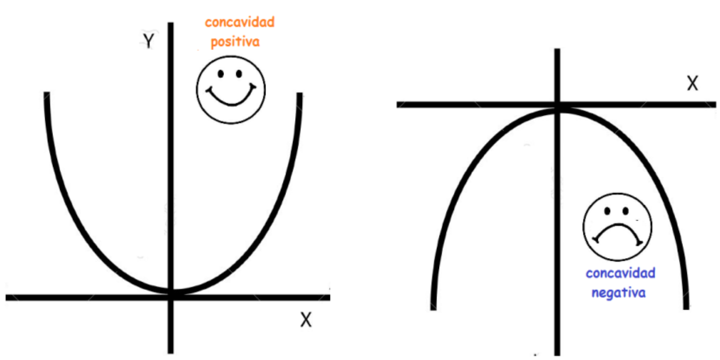
Función cuadrática. Parábola.

Una función es cuadrática, cuando la variable independiente x tiene como exponente máximo el 2. De forma general, la ecuación cuadrática se escribe:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a, b son números que multiplican a x, y c es un constante que se suma. Si a > 0, la parábola es positiva, si a < 0, ocurre lo contrario.

Y si graficamos a las funciones cuadráticas, obtendremos parábolas. Una parábola, tiene alguna de estas formas, dependiendo de su concavidad:

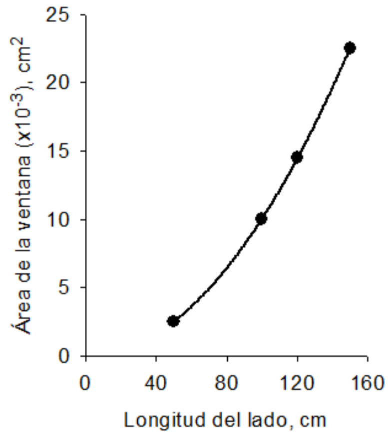


Veremos un ejemplo: Un estudiante quiere poner mosquiteros en cuatro ventanas (cuadradas) de su casa. Todas las ventanas tienen diferente tamaño. Para ello mide la longitud de uno de los lados de cada una. Luego, sabiendo que el área de un cuadrado es A = Lado^2, calcula el área de mosquitero que debe colocar. Obtiene los siguientes valores

longitud, cm	Área, cm^2	Área x10^3, cm^2
50	2500	2,5
100	10000	10
120	14400	14,4
150	22500	22,5

NOTA: Para tener números más fáciles de graficar, este estudiante usa la notación exponencial (tercera columna de la tabla)

Luego, grafica los valores, obteniendo el gráfico que se observa a la derecha. Nótese que la función para este caso podría escribirse como:



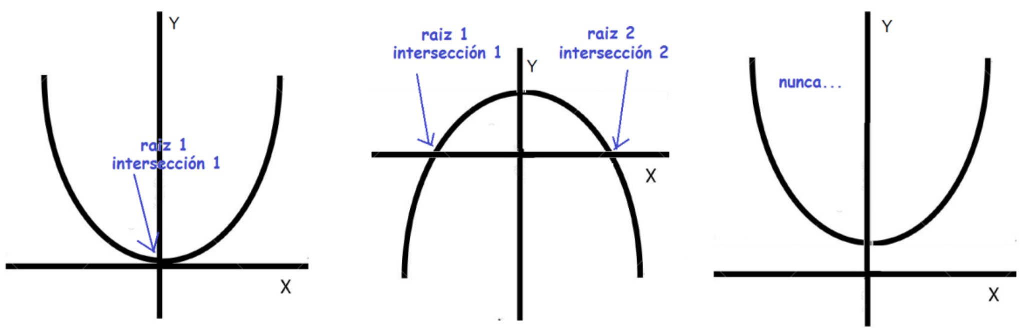
$$\text{Área} = a \times \text{longitud}^2 + b \times \text{longitud} + c$$

Sólo que en el caso más sencillo de la ecuación cuadrática, que es el que hemos graficado, a = 1, y b y c, valen cero, obteniendo entonces simplemente:

$$\text{Área} = \text{longitud}^2$$

Intersecciones de las funciones cuadráticas con el eje x. Raíces.

Dependiendo de la función las parábolas pueden intersectar al eje x una o dos veces, o nunca. Veamos algunas posibilidades:



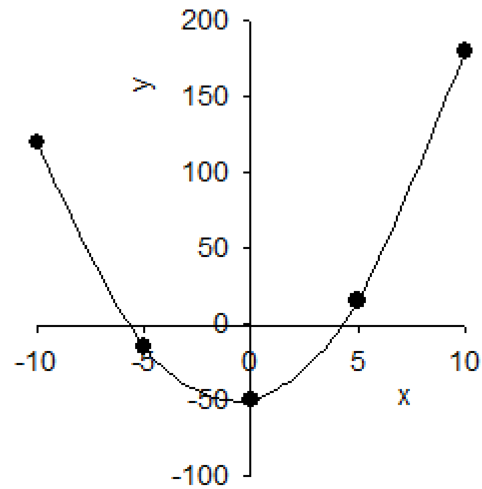
A esos valores de x, que corresponden a un valor de y = 0, se los llama raíces. Las mismas pueden calcularse como:

$$x_{raiz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}$$

Ejemplo: Dada la función $y = 2x^2 + 3x - 50$, confeccionar el gráfico para valores de x entre -10 y 10 y hallar analíticamente las raíces de la función. Primero, vamos a confeccionar la tabla, y luego la graficaremos en un par de ejes cartesianos:

x	$y = 2x^2 + 3x - 50$
-10	120
-5	-15
0	-50
5	15
10	180

Así obtendremos:



Gráficamente, podemos ver cuáles son las raíces de la función, pero las calcularemos mediante la fórmula:

$$x_{raiz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}$$

Reemplazamos:

$$x_{raiz} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-50)}}{2 \times 2}$$

$$x_{raiz} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 400}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 400}}{4}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 400}}{4}$$

$$x_1 = 4{,}3; x_2 = -5{,}8$$

Polinomios

Un polinomio es una función que matemáticamente se describe como:

$$y = a \times x^n + b \times x^{n-1} + \ldots + c$$

Por ejemplo, la función:

$y = 2 \times x^3 + 3 \times x^2 + x + 10$, es un polinomio

Nótese que si los coeficientes que multiplican a alguno de los términos son cero, los mismos se anulan. Por ejemplo,

$y = 2 \times x^3$, es un polinomio donde el término cuadrático, el lineal y la constante tienen por valor cero.

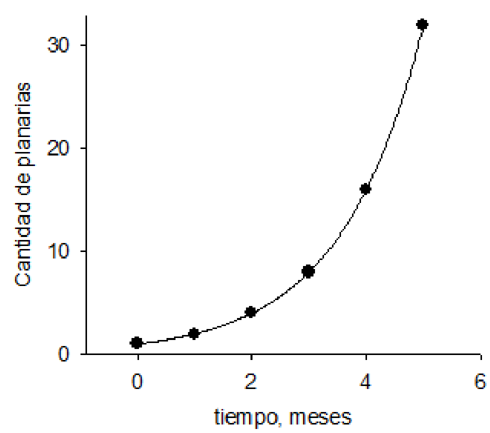
Funciones exponenciales

La función exponencial es aquella de la forma $y = a^x$. Donde a es un valor mayor que cero. Serán de particular interés, las funciones en las que $a = e$, siendo e el número de Euler, un número irracional que se toma como base de los logaritmos neperianos, $e \approx 2{,}718$

Ejemplo: Las planarias son “gusanos” planos (estrictamente, son platelmintos no parásitos de la familia Planariidae, orden Seriata), que se reproducen asexualmente dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de su hábitat son tales que las planarias se duplican aproximadamente cada mes, y que inicialmente sólo hay una planaria. Calcular el número de planarias que habrá según pasan los meses.

El número total de planarias al cabo de x meses será, matemáticamente: $y = 2^x$

Tiempo, meses	Cantidad de planarias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

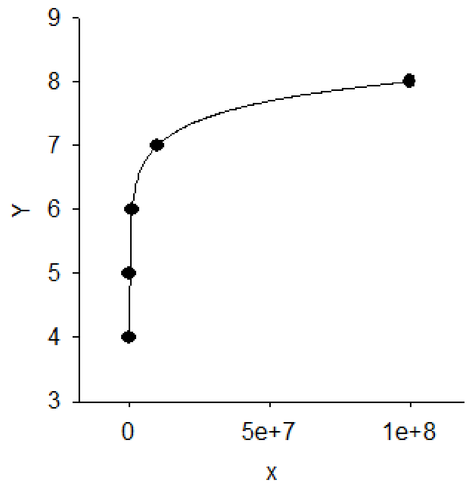


Funciones logarítmicas

Una función logarítmica es aquella que se expresa matemáticamente como

$$y = log_a x$$

Siendo *"a"* la base de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1. La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. El formato típico de una función logarítmica es la que se muestra a continuación:

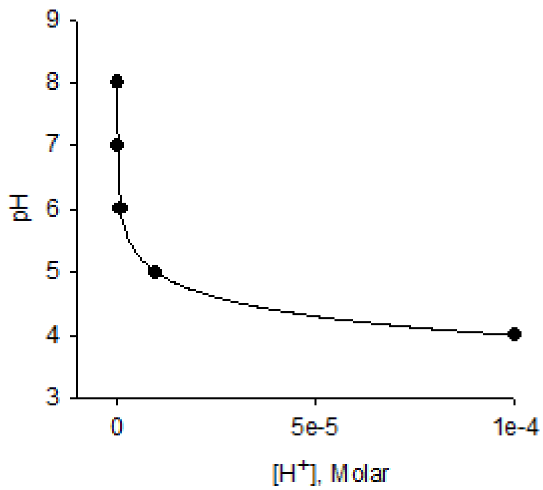


Veamos un ejemplo útil en la fisiología. Una forma de medir la acidez es medir el pH. La relación entre el pH y la concentración de protones es una función logarítmica en base 10, es decir:

$$pH = -log_{10}\left[H^+\right]$$

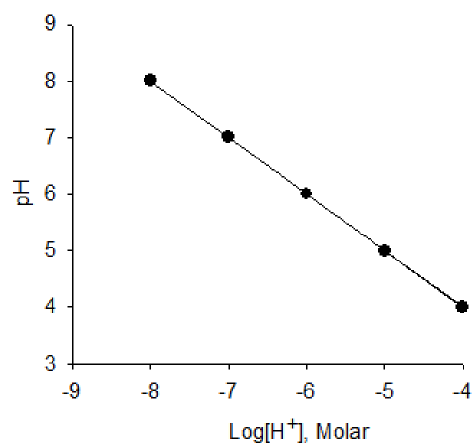
Siendo, $[H^+]$ la concentración de protones. Para las siguientes $[H^+]$, se obtuvieron los siguientes pH.

$[H^+]$, Molar	pH
1×10^{-4}	4
1×10^{-5}	5
1×10^{-6}	6
1×10^{-7}	7
1×10^{-8}	8



Notar que como la relación entre el pH y el log es negativa (por el signo menos que precede al log), la función decrece en lugar de aumentar.

Es muy útil en este caso, realizar este gráfico linealizando la función (esto quiere decir, hacer una transformación de los ejes para que el gráfico se vea lineal). Para ello, lo que hacemos es convertir al eje x en una escala logarítmica. En este caso obtenemos lo siguiente:



Como dijéramos al principio de esta sección de funciones, la función más sencilla es la función lineal. Es por ello que es habitual graficar las relaciones logarítmicas, de forma semilogarítmica (escala lineal en y, y escala logarítmica en y).

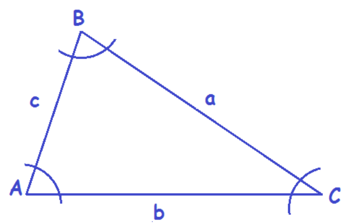
Función seno y coseno. Estas funciones son de particular interés para el estudio del campo electromagnético. Para estudiar las funciones seno y coseno, primero veremos algunas nociones de trigonometría.

Nociones de Trigonometría

La trigonometría es una parte de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". La trigonometría se ocupa, principalmente, de estudiar la relación entre lados y ángulos de un triángulo, y surgió a razón de las necesidades de la astronomía, la cartografía (el estudio de mapas) y la artillería, entre otras.

Triángulos

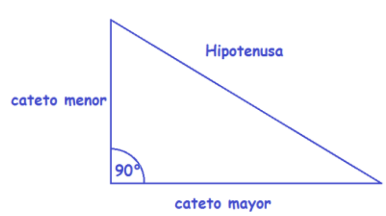
Utilizaremos en esta sección fundamentalmente triángulos. Un triángulo es un polígono de tres lados. Un triángulo, tiene las siguientes características:



Los puntos A, B y C se llaman vértices. Los segmentos AB, BC y CA se llaman lados (también los podemos llamar a, b y c, de acuerdo a que estén opuestos a los vértices A, B y C respectivamente). Los ángulos marcados son ángulos interiores.

Los triángulos, de acuerdo a sus ángulos interiores, se pueden clasificar en acutángulos, donde los tres ángulos son agudos, rectángulos donde un ángulo es recto, y obtusángulos cuando un ángulo es obtuso. De acuerdo a sus lados, se pueden clasificar en equiláteros (cuando los tres lados son iguales), isósceles (cuando dos lados son iguales y uno es desigual) y escalenos (cuando los tres lados son desiguales).

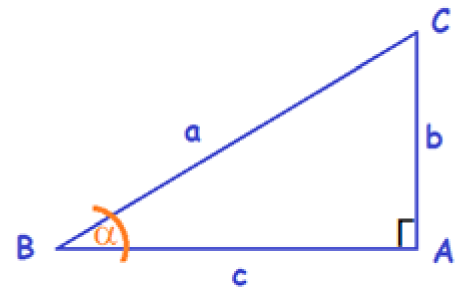
En un triángulo rectángulo el lado mayor se llama hipotenusa, mientras que los otros dos se llaman catetos.



Una de las propiedades más útiles de los triángulos es que la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°. A su vez, a todo triángulo rectángulo se aplica el **Teorema de Pitágoras** que dice que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los catetos. Esto puede escribirse como:

$$H^2 = (Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2$$

Razones Trigonométricas



Consideremos un triángulo rectángulo ABC. En él, el vértice A corresponde al ángulo recto (representado por ┌ dentro del triángulo) y los vértices B y C corresponden a los ángulos agudos. Por consiguiente, la letra "a" corresponderá al lado que se opone al ángulo recto (que denominamos anteriormente hipotenusa) y b y c a los lados que se oponen a los ángulos agudos (que denominamos catetos).

¿Cuántas razones (o cocientes) podemos formar entre los lados a, b y c?

Son 6 y corresponden a:

$$\frac{b}{a};\frac{c}{a};\frac{b}{c};\frac{c}{b};\frac{a}{c};\frac{a}{b}$$

Les daremos un nombre a cada una de estas relaciones. Tomaremos como referencia al ángulo agudo α. Para este ángulo, el cateto b, es el que se opone al vértice B, se llamará cateto opuesto, y el cateto c, que es el que está contiguo al vértice B, se llamará cateto adyacente. Se definen, entonces, las siguientes razones trigonométricas:

$$\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad cotg\,\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c}$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{c} \qquad cosec\,\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}$$

Siendo, *sin* = seno; *cos* = coseno; *tg* = tangente; *cotg* = cotangente; *sec* = secante; *cosec* = cosecante.

De todas estas las tres de la columna izquierda son las fundamentales, dado que las de la derecha son las funciones inversas de las de la izquierda. En la sección siguiente veremos las funciones seno y coseno en mayor detalle.

Identidades trigonométricas importantes

Las tres igualdades que observamos en el apartado anterior, permiten relacionar a las razones trigonométricas. Estas igualdades se llaman identidades, pues son válidas para cualquier ángulo. Veremos ahora otras dos.

Si $$sin\,\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \times sin\,\alpha$$

A su vez, si $$cos\,\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \times cos\,\alpha$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras que establecía que:
$H^2 = (Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2$,

Para nuestro triángulo podremos renombrarla como: $a^2 = b^2 + c^2$, si reemplazamos por las igualdades que obtuvimos anteriormente, $a^2 = a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B$, y si dividimos por a^2, resulta:

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

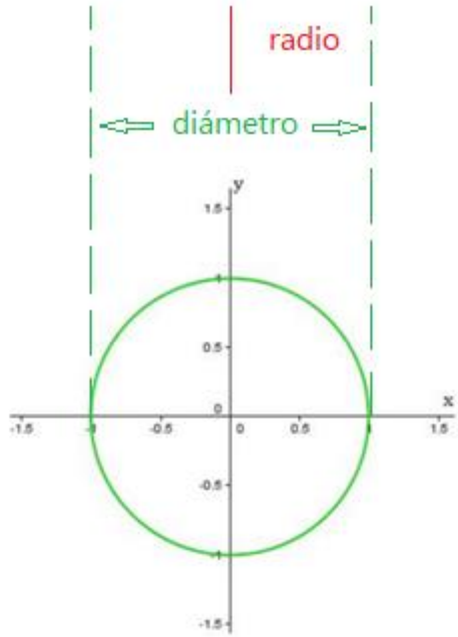
Por último, otra identidad importante es la siguiente. Si hacemos el cociente entre el seno y el coseno del ángulo B, resulta:

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b \times a}{c \times a} = \frac{b}{c} = tg$$

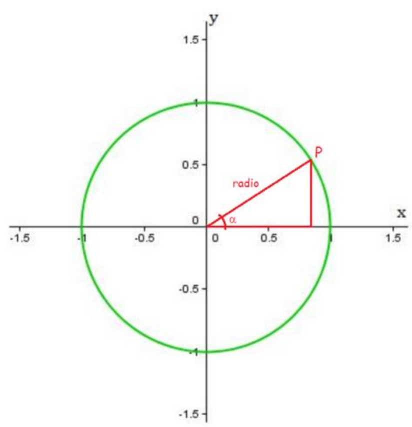
Donde tg es la tangente. En otras palabras, la tangente es el cociente entre cateto opuesto y cateto adyacente.

Funciones seno y coseno

Para comprender estas funciones, comenzaremos viendo la circunferencia de radio 1. Para ello, vamos a graficar primero en un par de ejes a dicha circunferencia.



Recordemos que el radio de una circunferencia es la mitad del diámetro, de allí que, si miran esta circunferencia y los valores en los ejes x e y, el valor del radio es 1. Iremos dibujando un triángulo dentro de esta circunferencia, creando un segmento entre el centro del círculo y un punto P.

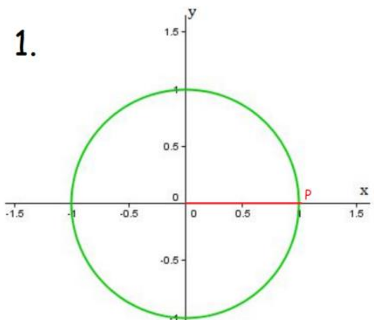


Nótese que la hipotenusa del triángulo que dibujamos, ahora tiene, en todo momento, una longitud igual a 1, que coincide con el radio de la circunferencia. También vamos a mencionar que el perímetro de un círculo es 2 π r. Dado que el círculo que dibujamos es de radio igual a 1, el perímetro de este círculo es 2 π. Del apartado anterior sabemos que la función seno de un ángulo (en este caso lo llamamos α), puede definirse como:

$$\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Vamos a ir construyendo la función seno, variando la posición del punto P. Nótese, que al ir variando la posición del punto P, iremos definiendo triángulos de diferentes tamaños, aquí se muestran algunos a modo de ejemplo. Todos ellos, tienen una hipotenusa de radio 1 (dado que la distancia de P al centro es siempre la del radio).

1.

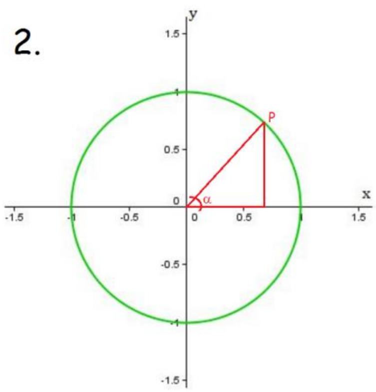


En este caso, la hipotenusa está apoyada sobre el eje, lo que equivale a un triángulo de cateto opuesto de valor 0. Por lo tanto,

$$sin\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{0}{1} = 0$$

La función seno del ángulo en este punto P (cuya posición en el perímetro llamaremos 0 porque es el primer valor que tomamos) valdrá cero, dado que el cateto opuesto no tiene longitud alguna.

2.

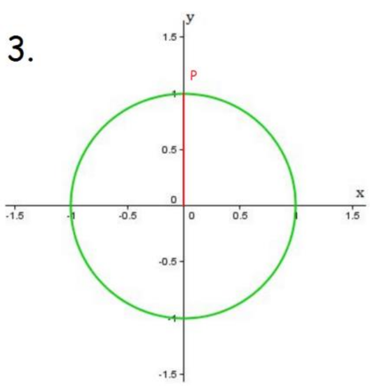


Si lo resolvemos para el caso 2, mediremos la longitud del cateto opuesto, que nos da (aproximadamente) 0,71 en el eje y. Entonces,

$$sin\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{0.71}{1} = 0{,}71$$

Nótese que el punto P, ahora está ubicado aproximadamente en 1/8 del perímetro total, lo que equivale a ¼ π.

3.



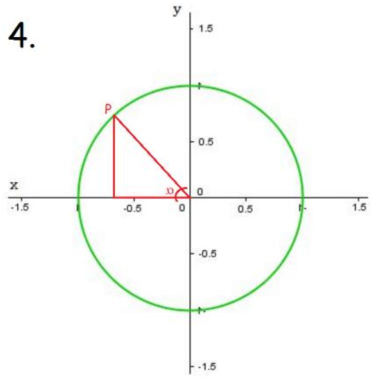
Para el caso 3, la hipotenusa vale 1, lo mismo que el cateto opuesto (nótese que ambos se superponen, de allí que nos logramos ver el triángulo). Entonces,

$$sin\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

Nótese que el punto P, ahora está ubicado aproximadamente en 1/4 del perímetro total, lo que equivale a ½ π.

Si lo resolvemos para el caso 4, la hipotenusa vale 1, mientras que el cateto opuesto vale 0,71

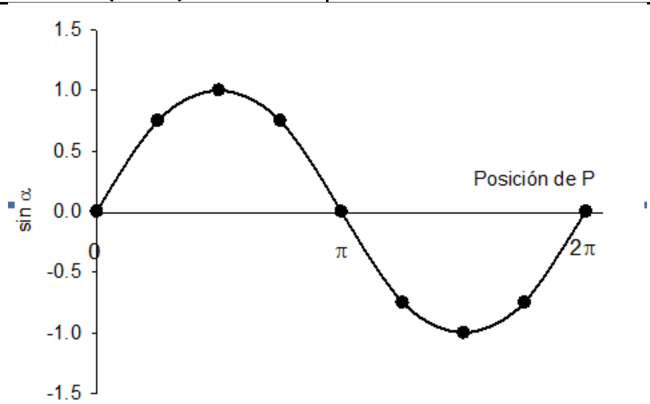
$$4.\ sin\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{0{,}71}{1} = 0{,}71$$



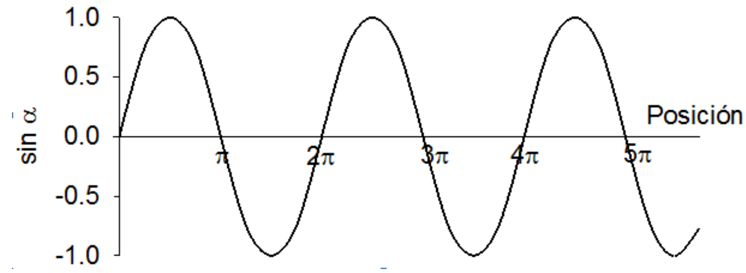
Nótese que el punto P, ahora está ubicado aproximadamente en 3/8 del perímetro total, lo que equivale a 3/4 π.

Y podríamos seguir así, sucesivamente, definiendo infinitos triángulos encerrados en nuestra circunferencia. Ahora vamos a graficar los valores obtenidos para los senos, en función de la posición del punto P en la circunferencia. Primero confeccionamos la tabla que vamos a graficar con los valores que obtuvimos y los que podrían obtener si siguieran dibujando los triángulos sucesivos:

Posición del punto P en la circunferencia	sin α
0 (0°)	0
1/4 π (45°)	0,71
1/2 π (90°)	1
3/4 π (135°)	0,71
π (180°)	0
5/4 π (225°)	-0,71
3/2 π (270°)	-1
7/4 π (315°)	-0,71
2 π (360°)	0



Esta función se dice que es periódica, dado que si siguiéramos dando vueltas sobre el círculo repetiríamos la función infinidad de veces, obteniendo algo así:

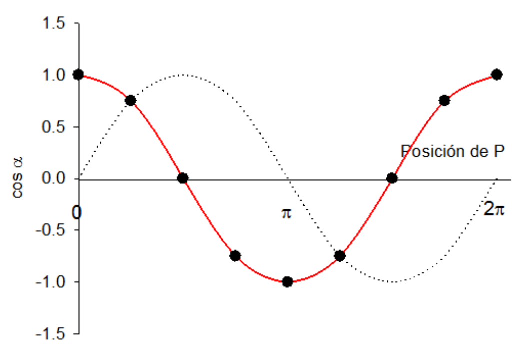


Veamos ahora la función coseno. Si revisamos las nociones de trigonometría, podemos darnos cuenta que la función coseno puede construirse de forma análoga a la planteada para la función seno, sólo que ahora, en lugar de tener en cuenta al cateto opuesto, mediremos la longitud del cateto adyacente:

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Obtendremos los siguientes valores:

Posición del punto P en la circunferencia	cos α
0 (0°)	1
1/4 π (45°)	0,71
1/2 π (90°)	0
3/4 π (135°)	-0,71
π (180°)	-1
5/4 π (225°)	-0,71
3/2 π (270°)	0
7/4 π (315°)	0,71
2 π (360°)	1



La línea punteada muestra la función seno que mostráramos antes. Noten que la función seno y coseno están desfasadas en ½ π que equivale a decir que están desfasadas 90°. Al igual que la función seno, es una función periódica.

Mediciones

El estudio de una ciencia implica realizar mediciones, el resultado de estas es la medida. Este proceso no es exclusivo de las ciencias, sino que nuestra vida se rige de medidas: cuánto cuesta un determinado producto, cuánto mide una persona, qué hora es, cuánto pesa un recién nacido, qué concentración de hemoglobina hay en sangre, entre otros.

La Medición puede ser directa o indirecta. La **Medición Directa** es aquella que se obtiene a partir de la simple lectura de un instrumento de medición, por ejemplo, la hora en un reloj, el peso de las naranjas en la verdulería, la temperatura en un termómetro. En estos casos el reloj, la balanza, el termómetro son los instrumentos de medición. La **Medición Indirecta** es la medida que resulta de una operación matemática. En la Física hay muchas magnitudes físicas que se definen como el resultado de una operación matemática, por ejemplo, la superficie de un lote de forma rectangular es el resultado de multiplicar lado por lado.

Hay dos componentes fundamentales en el proceso de la Medición: la magnitud y las unidades (sistema de unidades). Una magnitud es la propiedad del cuerpo susceptible de ser medida. Por ejemplo, las personas "altas" tendrán una magnitud de altura mayor que una persona "baja". Para medir una magnitud se emplea una cantidad fija de la misma clase que se llama **unidad**. Por ejemplo, en nuestro ejemplo de altura, normalmente utilizamos el metro como unidad.

En la actualidad existen el Sistema Inglés de unidades y el Sistema Internacional del cual proviene el sistema que usamos es nuestro país, llamado SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino). Dentro de este sistema es común hablar del sistema MKS (metro, kilogramo, segundo). Otro sistema de unidades es el CGS (centímetro, gramo, segundo). En el siguiente cuadro se mencionan algunas magnitudes con sus respectivas unidades:

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
volumen	metro cúbico	m^3
velocidad	metro/segundo	m/s

Es común acompañar a la unidad con un prefijo que denota el orden de magnitud de la medida, particularmente para números pequeños o grandes, respecto de la unidad de medición. Por ejemplo, en las palabras kilómetros y kilogramos, el prefijo kilo equivale a 10^3 (1000).

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	Yotta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Petta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-10}	Amstrong (no es un prefijo)	Å
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

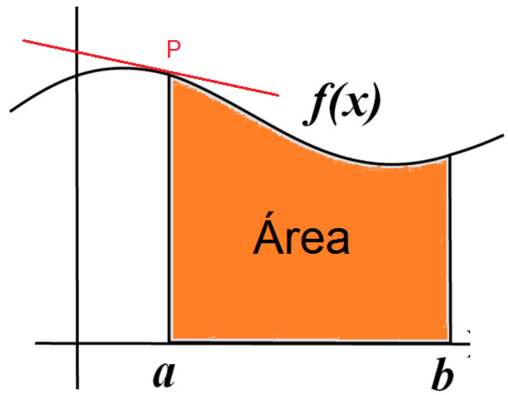
Las Magnitudes las dividiremos en:

Magnitudes escalares: son aquellas cuya medida es un escalar, esto es un número con su unidad. Ejemplo: la longitud, masa, superficie, volumen, densidad, entre otras.

Magnitudes vectoriales: son aquellas cuyas medidas son vectores, es decir que se debe indicar de ellas la intensidad, la dirección, sentido y dónde están aplicadas, como hemos visto en una sección anterior.

Nociones de Derivadas e Integrales

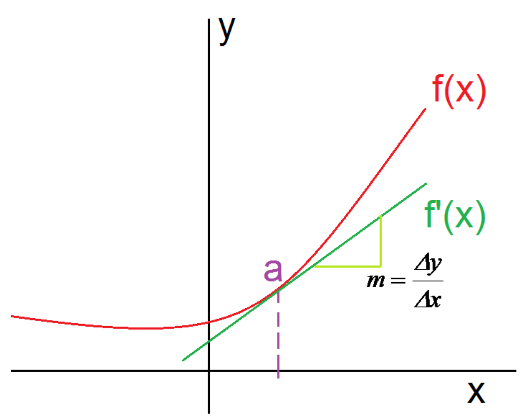
Las derivadas y las integrales son herramientas fundamentales del cálculo, que permiten modelar todos los aspectos de la naturaleza en las ciencias físicas.



De la forma más sencilla posible, podemos interpretar geométricamente a la derivada de una función en un punto P, como la pendiente de la recta tangente que toca a la función en ese punto P (en este ejemplo, la pendiente de la recta roja). A su vez, podemos ver a la integral de una función como el área que queda encerrada debajo de dicha función (área anaranjada). A continuación, veremos algunos conceptos que serán útiles.

Derivadas

La derivada de una función en un punto es una medida de la velocidad con la que varía el valor del dicho punto al cambiar el valor de la variable independiente. La derivada es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



Si nos fijamos en el gráfico la pendiente (m) de la recta (en verde) se puede calcular como la pendiente de cualquier función lineal:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La pendiente, en otras palabras, es una medida de lo que se incrementa la variable dependiente "y", al incrementarse la variable independiente "x".

Si el intervalo considerado como incremento en x, fuera infinitesimalmente pequeño, la recta tocaría sólo un punto de la recta (en el ejemplo, en el punto "*a*"). Es decir que, para aproximarnos a ese valor, iremos reduciendo cada vez más el intervalo, y por este motivo en lugar de escribirlo como "Δx", lo denotaremos "dx". Esta función que sólo pasa tangente a un único punto de la recta es la función derivada (f'(x)) en el punto "a". Al incremento infinitesimal respecto de x, lo escribiremos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Dado que la derivada equivale al intervalo más pequeño posible, estamos hablando de un intervalo "límite". Podemos pensar en el límite como el horizonte, cada vez que damos un paso nos acercamos más, pero es imposible tocarlo. En lenguaje matemático, podemos definir a las derivadas utilizando el concepto de límite como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

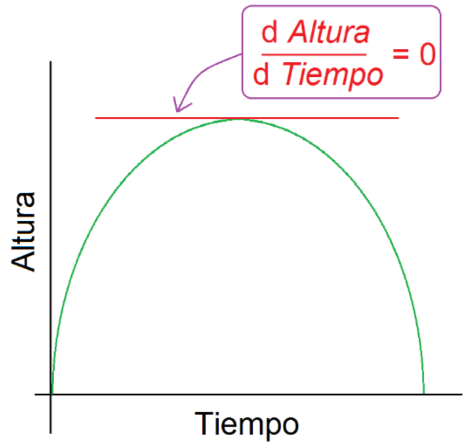
Esto es, el límite de la función cuando el intervalo medido (h) entre los dos puntos de la recta tangente tiende a 0 (es decir, cuando es lo más pequeño posible).

La función derivada permite obtener el valor de la derivada de la función f(x) para cada valor de "x". El proceso de calcular la función derivada de una función dada se denomina diferenciación. Algunas funciones no tienen derivadas en todos o en algunos de sus puntos, dado que para que una función sea derivable en un punto tiene que ser continua en dicho punto, es decir que pequeños incrementos de la variable independiente produzca pequeñas variaciones de la variable dependiente.

La derivada de una función puede ser asimismo derivable. La derivada de una primera derivada se denomina segunda derivada. También podría existir la tercera derivada y así sucesivamente. Este proceso se denomina derivación sucesiva.

Cálculo de máximo y mínimo

La determinación de los valores máximos y mínimos de una función, es una de las utilidades que podemos encontrar en las derivadas. Tomemos f(x) como una función de x. El valor de x para el cual la derivada de f(x) con respecto a x es igual a cero, corresponde a los puntos de inflexión de la función f(x) donde sus valores son máximos o mínimos. Tomemos como ejemplo la altura de un proyectil que se dispara en línea recta, algo que veremos en la siguiente Unidad. Abajo se muestra el gráfico de la altura (y) en función del tiempo (x).



Para hallar el punto de máxima altura, es decir el punto de inflexión, donde el proyectil deja de subir y comienza a bajar, deberíamos encontrar el punto donde la derivada de la función es igual a cero. Es decir, cuando no haya cambio de altura en el tiempo. Este punto coincide con aquel donde la pendiente de la recta tangente (recta roja) es igual a cero.

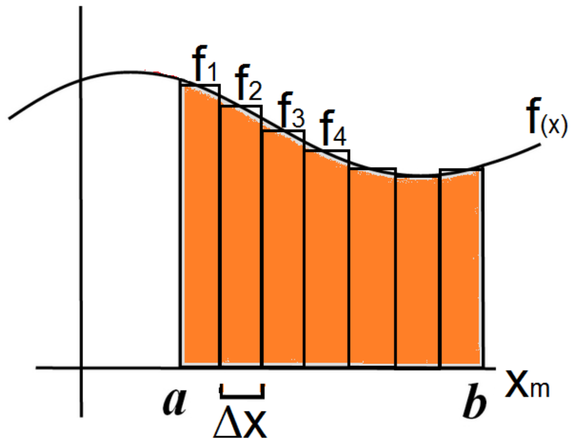
Resolución de derivadas

En el presente curso, sólo veremos las derivadas más comunes y simples. Aquí encontrarán algunas de ellas:

Función	Derivada	Nota
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	La derivada de cualquier constante (k), es cero
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	La derivada de x siempre vale 1
$f(x)=k\times x$	$f'(x)=k$	La derivada de una constante multiplicada por x es el valor de la constante
$f(x)=g(x)+h(x)$	$f'(x)=g'(x)+h'(x)$	La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de la derivada de cada función
$f(x)=k\times g(x)$	$f'(x)=k\times g'(x)$	La derivada de una función multiplicada por un valor constante (k), es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\times x^{n-1}$	Para cualquier función de x elevada a la "n", la derivada es igual a multiplicar por n a x elevada a (n-1).
$f(x)=ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	La derivada de e elevada a la x, es la misma función
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\times ln(a)$	
$f(x)=sin(x)$	$f'(x)=cos(x)$	
$f(x)=cos(x)$	$f'(x)=-sin(x)$	

Área bajo la curva y concepto de funciones integrales

La formulación del área bajo una curva es el primer paso para desarrollar el concepto de integral. El área bajo la curva formada por el trazo de la función f(x) y el eje x se puede obtener aproximadamente, dibujando rectángulos de anchura finita y altura *f* igual al valor de la función en el centro del intervalo.



Podríamos aproximar el área bajo la curva como la suma de todos los rectángulos internos:

$$\acute{A}rea = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x$$

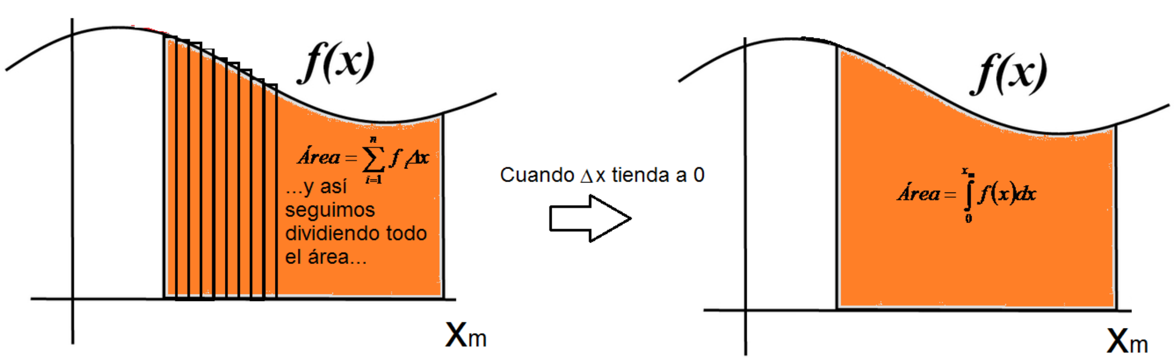
Es decir, la suma del producto del valor de la función en el punto medio del intervalo (altura del rectángulo) y la longitud Δx del intervalo (que es lo mismo que calcular el área de cada rectángulo, ya que estamos multiplicando la base por la altura de cada uno).

Cuanto más pequeño sea el intervalo, el número de rectángulos internos será mayor, y más nos aproximaremos al área real bajo la curva.

La Integral como Límite del Área

La aproximación al valor del área bajo una curva puede mejorarse tomando rectángulos más estrechos. La idea de la integral es incrementar el número de rectángulos (N) hacia el infinito, tomando el límite cuando el ancho del rectángulo tiende a cero.

Nuevamente, necesitamos recurrir a la idea de límite, dado que llevaremos al ancho del intervalo al valor límite (cercano a cero).



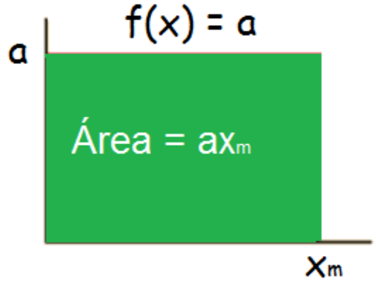
$$\acute{A}rea = \int_{0}^{x_m} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\Delta x$$

Esto quiere decir que el área será igual a la integral ($\int_0^{x_m}$) de la función respecto de x, equivalente a decir que es igual al límite de la suma de la función en cada punto multiplicado por el intervalo de x elegido.

Aunque el concepto de área geométrica es una forma conveniente de visualizar una integral, la idea de la integración es mucho más general. Cualquier variable física continua puede ser dividida en incrementos infinitesimales de modo que la suma del producto de ese "ancho" por el valor de la función se acerca a una suma infinita.

Ejemplos de Integral de Área

Algunos ejemplos pueden reforzar la idea de la integral como el área bajo una curva. Para una función que es una constante que llamaremos "*a*", el área formada por la función es exactamente un rectángulo.

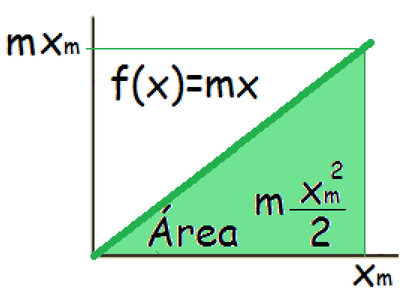


El área del rectángulo, puede calcularse como:

$$Área = a \times x_m = Integral = \int_0 f(x)dx = \int_0 a\,dx$$

Siendo "x_m" un punto cualquiera de la recta que determinará la longitud del lado del rectángulo. Por ejemplo, podría valer 2 cm, 5 cm, o cualquier otro número que quieran darle. La conclusión general es que la integral de una constante ("a") es exactamente la constante multiplicada por la variable de integración x.

En una función *f(x) = mx*, es decir una función lineal, el área que queda definida entre el origen y el punto que llamamos x_m es un triángulo. Por lo tanto, podemos igualar a esta integral al valor del área de un triángulo, que es (base x altura)/2.



Dado que la base tiene un valor igual a x_m, y la altura tiene un valor igual a mx_m, decimos que:

$$Área = \frac{(x_m)\times(m \times x_m)}{2} = \int_0^{x_m} f(x)dx = \int_0^{x_m} (m \times x)dx = m\frac{x_m^2}{2}$$

De forma general, la integral para cualquier polinomio se puede escribir como:

$$\int_0^x \left(m \times x^n\right) dx = m\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

Algunas integrales comunes

A continuación, veremos la resolución de algunas integrales sencillas:

$$\int dx = x + C$$

$$\int k \; dx = k \times x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

$$\int cos(x) dx = sin(x) + C$$

$$\int sin(x) dx = -cos(x) + C$$

Unidad 1: Matemática
Guía de Ejercicios.

Herramientas Básicas

1. Expresar en forma de potencias de 10 los siguientes números:

100.000
0,0001
24
0,315
0,037
153

2. Calcule usando notación científica:

0,0021 x 30000000
0,000045 / 34000
560000 / (8900 x 0,000058)
$7,54 \times 10^8 - 3,7 \times 10^7$
$\sqrt{90} \times 10^7$
$5,7 \times 10^{-4} + 240 \times 10^{-6}$
(780000 x 0,00496) / (0,0078 x 0,009)
$59000 \times 10^3 \times 0,00009$
$((5 \times 10^{-3})^3 \times 0,005) / 0,00000095$

3. Resuelva aplicando notación científica:

$(5 \times 10^8) \times (3,5 \times 10^{-6}) / (4 \times 10^{-2}) =$

4. Exprese en notación científica

382
21200
62000000
0,042
0,75
0,000069
$0,0087 \times 10^3$
4500×10^5

$84{,}6 \times 10^{-5}$

$0{,}12 \times 10^{-4}$

5. Resolver las siguientes multiplicaciones:

$320 \times 2 \cdot 10^{4}$

$0{,}15 \times 5{,}1 \cdot 10^{-1}$

$54 \cdot 10^{-3} \times 305$

$4 \cdot 10^{-5} \times 1{,}2 \cdot 10^{-2}$

$1{,}4 \cdot 10^{-5} \times 8{,}1 \cdot 10^{3}$

$0{,}06 \times 300$

6. Obtener los siguientes cocientes:

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{3}}{4 \cdot 10^{2}}$$

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}4 \cdot 10^{-2}}$$

$$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{4}}$$

$$\frac{2 \cdot 10^{5}}{1{,}6 \cdot 10^{-8}}$$

$$\frac{0{,}024}{200}$$

$$\frac{0{,}015}{0{,}05}$$

7. Hallar el logaritmo neperiano de los siguientes números:

e^{4}

$e^{3{,}1}$

$e^{0{,}02}$

8. Hallar el logaritmo decimal

$0{,}026$

$42{,}6$
400
$0{,}004$
8.200
$0{,}197$
10^{7}
$10^{-3{,}5}$

9. Realizar las siguientes operaciones

$log\left(\frac{10^{7}}{10^{-8}}\right)$

$log\sqrt[3]{10^{4}}$

$log\left(10^{7}\times 10^{-5}\right)$

10. Hallar los antilogaritmos de las siguientes cantidades

7
-3,5
4
100

11. ¿Cuál es el antilog de los siguientes logaritmos?

0,4567

4,567

456,700

12. Resolver

$10^{x} = 932$

$10^{4{,}70} = x$

13. Despeje “x” de las siguientes ecuaciones

$$2x+5=9$$

$$3-\frac{x}{2}=1$$

$$4x-11=-5x+7$$

$$\frac{5}{x}+2=-3$$

$$\frac{6x^2-12}{3x-4}=2x$$

14. Resuelva

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{5}$$

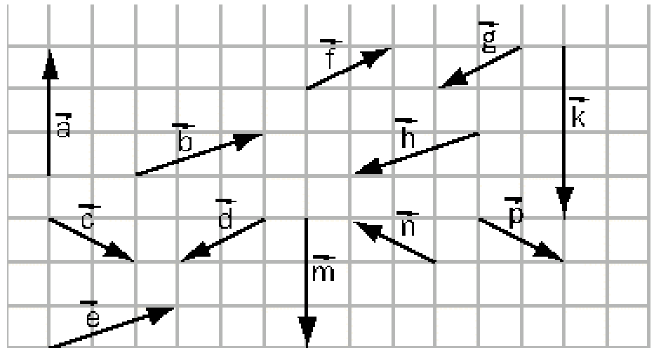
$$\frac{1}{8}+\frac{3}{9}$$

$$\frac{10}{4}-\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{6}+1$$

Vectores

15. Dados los vectores que se muestran en el esquema



a) Calcule la resultante de:

$\vec{a} + \vec{k}$

$\vec{g} + \vec{k}$

$\vec{c} + \vec{f}$

$\vec{e} + \vec{d}$

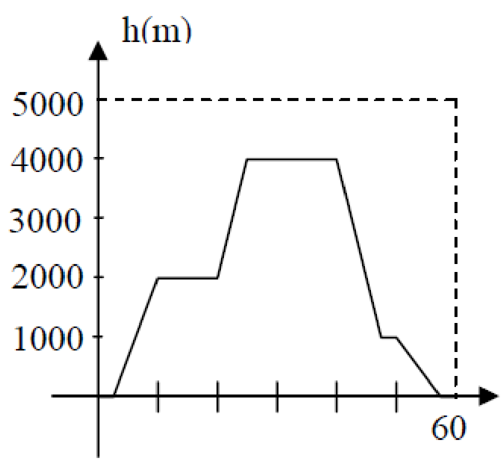
b) Indique qué vectores tienen idéntica dirección y sentido

c) Indiqué qué vectores, tienen idéntica dirección pero distinto sentido

Funciones

Interpretación de un gráfico

16. Un avión, desde que sale de la terminal de Buenos Aires, hasta que llega a la terminal de Bahía Blanca tarda 60 minutos. El siguiente gráfico describe la altura del avión durante el viaje.



Observando el gráfico, responder:

a. ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el avión? ¿Cuánto tiempo voló a esa altura?

b. ¿Cuánto tardó en llegar a la altura máxima?

c. ¿A qué altura se encontraba a los 30 minutos de partir?

d. ¿Cuántas veces estuvo a 3000 metros de altura?

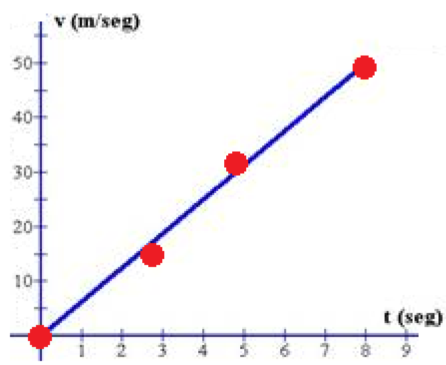
e. ¿En qué momentos subió? ¿En qué momentos bajó?

f. ¿Cuántas veces voló a altura constante?

Función lineal

17. Graficar la función: $f(x) = 2 \times x + 10$ para valores de x entre 0 y 10. Luego, indicar cuál es la pendiente y cuál la ordenada al origen.

18. El siguiente gráfico corresponde a la velocidad medida para un automóvil en función del tiempo. Obtenga el valor de la pendiente y de la ordenada al origen.



a. ¿Qué ocurre si Ud. toma los puntos rojos y calcula la pendiente?¿Coincide con la pendiente de la recta promedio?¿Cuál es la que debe utilizar?

19. Supongamos que la regeneración de tejidos en función del tiempo tiene un comportamiento lineal, donde la variable independiente es el número de días en que se regenera un milímetro cuadrado de tejido. Se ha observado que el primer día no hay tejidos regenerados, sin embargo, al cabo de 10 días se miden 4 mm^2 de tejidos regenerados. Determine (a) La pendiente y la ordenada al origen de la función lineal que describe el problema. (b) La cantidad de tejido regenerado, cuando han transcurrido 30 días. (c) El tiempo necesario para obtener 100 mm^2 de tejido.

20. Una enfermera mida la presión sistólica de un niño desde su nacimiento hasta los 18 años. Obtuvo a lo largo del tiempo los siguientes resultados.

Edad, años	Presión sistólica, mmHg
Recién nacido (0)	75
8	95
12	104
18	120

Grafique la presión sistólica en función de la edad. Calcule la pendiente y la ordenada al origen de la recta que obtuvo.

Función cuadrática. Parábola.

21. Grafique las siguientes funciones y halle las raíces de la función

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

$$y = x^2 + x + 1$$

22. Obtenga las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$

$$y = -x^2 - x + 3$$

Polinomios

23. Represente la función $y = x^4 - x^2$, y señalar sus intersecciones con el eje de abscisas y de ordenadas.

24. Represente la función $y = x^3 - x^1$, y señalar sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

Funciones exponenciales

25. Una población de bacterias crece según $C_t = C_0 \times e^{kt}$, donde C_0, es la concentración inicial de bacterias, *t* es el tiempo en segundos, y k es la constante de incremento de la población. Al iniciar el experimento hay 10^6 bacterias. Considerando que la constante k es igual a 10^{-1} seg^{-1}, grafique la concentración de bacterias en el tiempo (C_t), entre los 0 y los 50 seg.

26. La radiactividad o radioactividad es un fenómeno físico por el cual los núcleos de algunos elementos químicos, llamados radiactivos, emiten radiaciones. Un elemento radiactivo decae según $I_t = I_0 \times e^{\ kt}$ siendo k = 2 $días^{-1}$ y I_o = 1000 desintegraciones/día. Grafique el decaimiento radiactivo e indique qué cantidad queda del elemento respecto de la inicial luego de 1 día.

Funciones logarítmicas

27. Grafique las funciones

$$f(x) = 2 \times log(x)$$

$$f(x) = log\, x + (1)$$

28. Definiendo el pH como la representación logarítmica de la concentración de iones hidrógeno (H^+) de un líquido biológico (pH = -Log[H^+], que representa su acidez, ¿cuáles son las concentraciones de hidrógeno de los siguientes pH: 7, 8, 6, 5, 7,2, 7,4, 6,8, 3,1?

29. ¿Cuál de los siguientes pHs representa la mayor y menor concentraciones de H^+? 7,2; 7,4; 7,1; 6,8; 7,5?

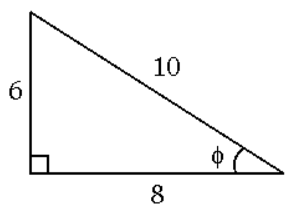
30. Grafique los datos que se muestran en la tabla. Trace una línea de tendencia que aproxime bien los valores de la tabla. Interpole el pH para una concentración de 0,2 μM, y extrapole el pH para una concentración de 100 μM.

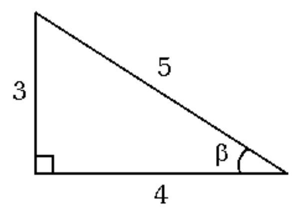
Tabla 1. pH en función de la concentración micromolar de protones

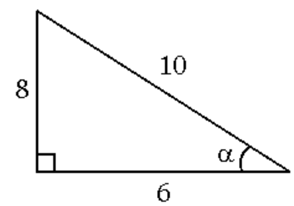
[H^+], μM	pH
0,1	7,0
0,5	6,3
1,0	6,0
5,0	5,3
10,0	5,0
50,0	4,3

Trigonometría

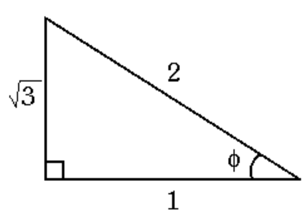
31. Calcule el seno, el coseno y la tangente de los ángulos indicados en los triángulos

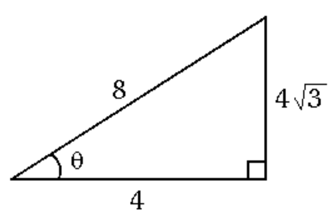




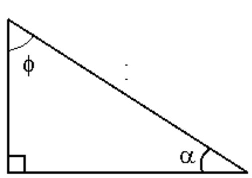


32. Calcule la secante y la cosecante de los ángulos indicados en los triángulos





33. Sabiendo que α = 30°, calcule el valor del ángulo ϕ



Mediciones

34. ¿Cuál es el área de un círculo de 3,5 cm de diámetro? Expresarlo en m^2

35. El corazón bombea sangre a un ritmo de 0,083 l/seg. Expresar este valor en en cm^3/seg

36. ¿Cuál es el volumen de una célula esférica de 50 μm de diámetro?

37. La densidad normal de la orina oscila entre 1,002 - 1,035 g/l. Expresar estos valores en kg/cm^3.

38. La relación 1/1.000.000 g equivale a:

a) 1 ng
b) 10^3 pg
c) 10^6 fg
d) 10 Å
e) nada de lo anterior es correcto

39. En un cultivo de orina se obtienen 1,3 x 10^6 bacterias por mm^3, esto significa que:

a) tiene 13 x 10^6 bacterias por mm^3 de orina
b) tiene 1300 bacterias por mm^3 de orina
c) tiene 1300000 bacterias por mm^3 de orina
d) tiene 0,0000013 bacterias por mm^3 de orina
e) tiene 0,00013 bacterias por mm^3 de orina

Derivadas

1. Hallar la derivada de la función $y = x^3$. Calcular el valor de la derivada cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, y $x_3 = -2$. Comprobarlo gráficamente.

2. Hallar la derivada de la función $y = \frac{1}{x}$

3. Hallar mediante la derivada y su representación gráfica, los máximos y mínimos de la siguiente función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Integrales

4. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

$$2x^2$$
$$\frac{2}{3}x^3$$
$$3x^2 + 2x$$

5. Resolver las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int_0^2 x^2 dx$$
$$I_2 = \int_0^4 x^3 dx$$

6. Hallar el área comprendida bajo la curva $y = \frac{1}{x}$, entre los valores $x_1 = 1$, y $x_2 = e$.

7. Hallar el área comprendida bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$, entre los valores $x_1 = 1$, y $x_2 = \infty$.

Unidad 2. Mecánica Clásica
Contenidos

Cinemática

¿Qué es la Cinemática? Posición. Desplazamiento. Instante de tiempo. Velocidad media. Velocidad, o velocidad real, o velocidad instantánea, v. Aceleración media, a_m. Trayectoria. Ecuación horaria o ecuaciones de movimiento. Esquema. Movimiento rectilíneo uniforme, MRU. Movimiento rectilíneo uniformemente variado, MRUV. Movimientos libres verticales. Caída libre y tiro vertical.

Dinámica

Fuerzas. Leyes de Newton. Primera Ley de la Dinámica: Ley de la inercia o Principio de Galileo. Segunda Ley de la Dinámica: Ley de la masa o Principio de Newton. Tercera Ley de la Dinámica: Principio de Acción y Reacción. Diagrama de cuerpo libre. Unidades de fuerza. Trabajo. Fuerza de aplicación constante. Trabajo. Fuerza de aplicación no constante. Energía y Leyes de conservación. Energía mecánica: energía cinética y energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas. Trabajo de la fuerza peso. Trabajo de fuerzas no conservativas. Fuerzas no conservativas y variación energía mecánica. Fuerzas de rozamiento como ejemplo de fuerzas no conservativas.

Unidad 2: Mecánica Clásica

Cinemática

¿Qué es la Cinemática?

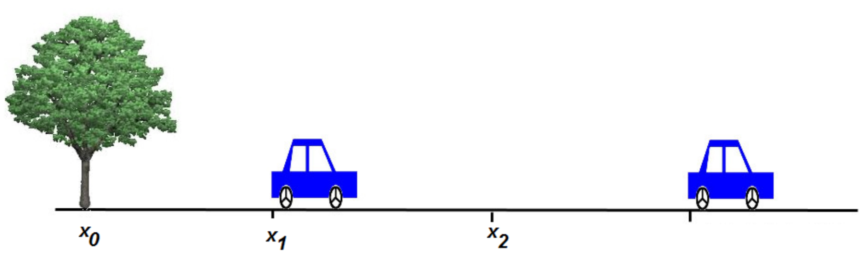
El nombre cinemática deriva de la palabra griega "*kinetos*" cuyo significado es mover o desplazar. La Cinemática es entonces la parte de la física que se ocupa del movimiento de los objetos a través del espacio y el tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

La cinemática comprende cinco movimientos principales, de los cuales nos detendremos sólo en algunos de ellos. Estos son el movimiento rectilíneo uniforme (MRU), el movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), el movimiento armónico simple, el movimiento circular y el movimiento parabólico.

Definiremos algunos conceptos que serán necesarios a lo largo de esta unidad:

Posición (x)

Se llama posición al lugar que un móvil ocupa en el espacio. En cinemática se asume que los móviles (los carritos en el ejemplo anterior) no tienen volumen, no ocupan espacio, es decir, son un punto, de allí que se los llama "puntuales". Es un modelo "ideal", que permite simplificar el estudio del movimiento. La posición tiene unidad de longitud (por ejemplo, cm, m, km). Cuando veamos que la x tiene un subíndice (por ejemplo, "x_1") se está haciendo referencia a un lugar en particular.



Desplazamiento, ($x_2 - x_1$), Δx_{12}

Es la diferencia entre dos posiciones (la posición posterior menos la posición anterior).

Instante de tiempo, t

Momento único e irrepetible en el transcurso del tiempo. Se indica con cualquier unidad de tiempo (por ejemplo: el segundo, s, en referencia a una escala arbitraria). Al igual que lo dijimos con “x_1”, cuando veamos t con un subíndice (por ejemplo, “t_1”) estamos haciendo referencia a un instante en particular.

Intervalo de tiempo, ($t_2 – t_1$), Δt_{12}

Es el tiempo transcurrido entre dos instantes. Se obtiene restando el instante posterior menos el instante anterior.

Velocidad media, v_m

Es el cociente entre un desplazamiento cualquiera y el intervalo de tiempo correspondiente. Se mide en cualquier unidad de longitud dividida cualquier unidad de tiempo, por ejemplo m/s.

Velocidad, o velocidad real, o velocidad instantánea, v

En palabras sencillas, es el cociente entre un desplazamiento y un intervalo de tiempo extremadamente pequeño.

Aceleración media, a_m

Es el cociente entre un incremento o un decremento de velocidad y el intervalo de tiempo en el que esa variación transcurre. Se mide en cualquier unidad de velocidad dividida cualquier unidad de tiempo. Por ejemplo m/s^2.

Trayectoria

Sucesión de posiciones por las que va pasando un móvil.

Ecuación horaria o ecuaciones de movimiento, x = f(t)

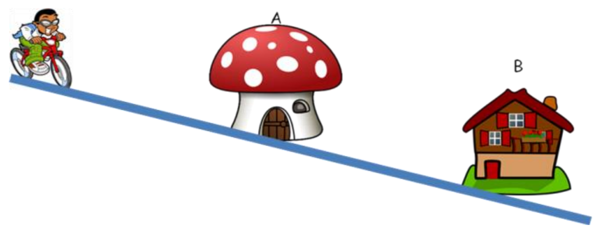
Es cualquier función matemática entre el conjunto de las posiciones “x” y el conjunto de los instantes de tiempo “t”.

Esquema

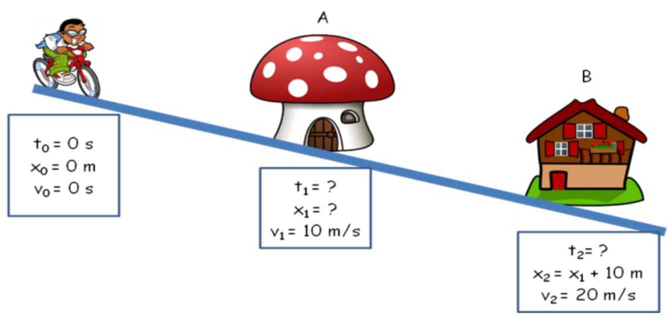
Consiste en dibujar la trayectoria y consignar sobre ella la información cinemática de la que se disponga, en la proximidad (lo más junto posible) de la posición correspondiente. Un esquema bien hecho y completo es garantía casi absoluta de que el ejercicio estará bien resuelto.

Practiquemos cómo hacer un esquema correctamente

Un niño viaja en bicicleta. Parte del reposo por una rampa inclinada con aceleración constante. Pasa por la casa A con una velocidad de 10 m/s y por la casa B con una velocidad de 20 m/s. Si ambos puestos están distanciados 10 metros, se pide calcular la aceleración que experimenta, la distancia del punto de partida a la casa A, y el tiempo transcurrido desde que partió hasta que pasó por la casa B.



Vamos a ponerle los datos que tenemos y los datos que queremos calcular en cada una de las posiciones. En nuestros problemas de cinemática, normalmente incluiremos, tiempo, posición, velocidad y aceleración:

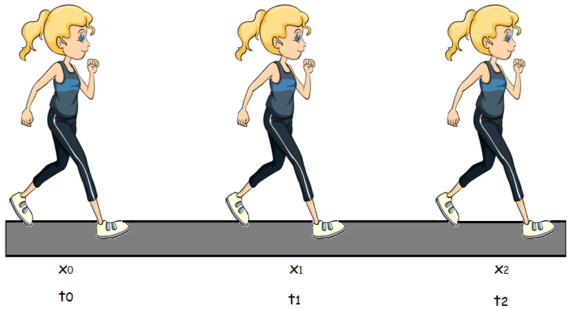


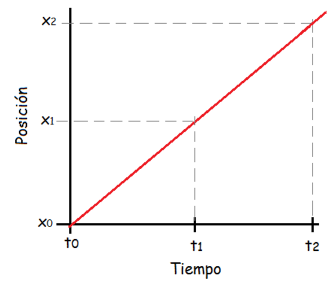
La posición donde se ubica inicialmente el niño, el tiempo de inicio y la velocidad inicial valen 0 (porque hasta que arranca está quieto). Luego van a ser de interés la posición y el tiempo en el que pasa por la casa A (tenemos como dato la velocidad en ese punto) y lo mismo para la casa B. Sabemos, sin embargo, que la distancia entre A y B es de 10 m, por esto si bien no sabemos cuánto vale x_2, sabemos que su valor será x_1 (la distancia desde donde partió el niño) más la distancia entre ambas casas (10 m). De allí que $x_2 = x_1 + 10$.

Movimiento rectilíneo uniforme, MRU

El MRU es el movimiento más sencillo. La trayectoria, como lo indica su nombre, es una línea recta y la velocidad es constante (no hay aceleración).

Un sistema móvil que se mueve en MRU avanza distancias idénticas en iguales tiempos, dado que la velocidad es constante. Esto quiere decir que, por ejemplo, cada 4 segundos siempre estará avanzando la misma distancia. Un esquema de este tipo de movimiento podría ser:





Dado que la velocidad es un valor constante, cuando un móvil se desplaza en MRU, el gráfico de la posición que tiene el móvil en función del tiempo es una línea recta cuya pendiente es la velocidad media. Recordemos de la Unidad 1 de Matemática, que la ecuación de una recta es

$$y = m \times x + b\,,$$

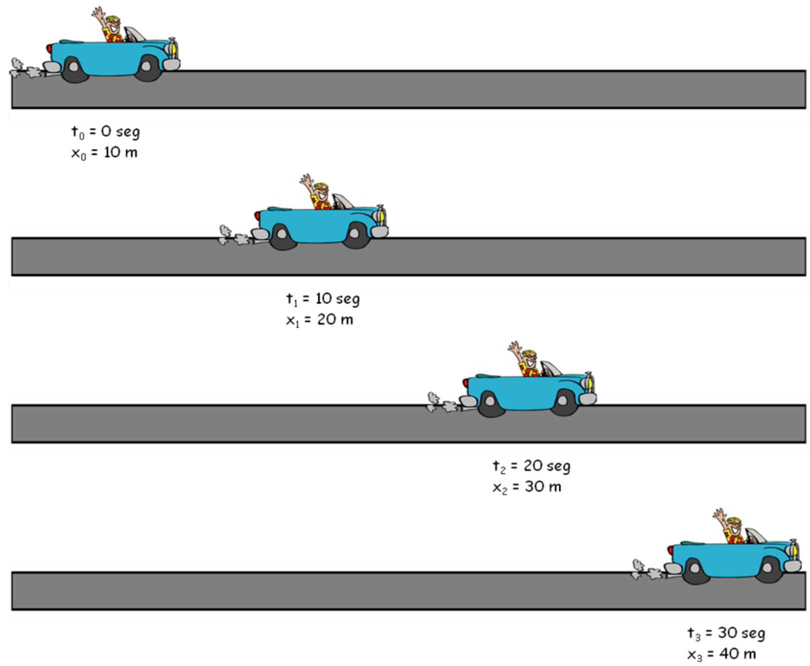
la variable independiente "x", en este caso es el tiempo (t), la variable dependiente "y" es la posición (que usualmente en cinemática aparece como "x_i"… a no confundirse…), la pendiente (m) es entonces:

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(posición)}{\Delta(tiempo)} = velocidad\ media\,.$$

Dependiendo de si representamos un avance o un retroceso, podremos observar una pendiente positiva (si es un avance) o una pendiente negativa (si es un retroceso)… pero eso dependerá de cómo definimos la posición inicial en el sistema de referencia. Si no hubiera cambio de posición, la recta tendría una pendiente igual a cero.

Ecuación horaria.

Las ecuaciones horarias, o de movimiento, tienen que contener obligatoriamente a la x de trayectoria, y al tiempo t. Tomemos el siguiente ejemplo. Un pasajero viaja en un auto moviéndose en línea recta como se muestra en el esquema. Grafique la posición en función del tiempo, y calcule la velocidad media a la que se desplaza.

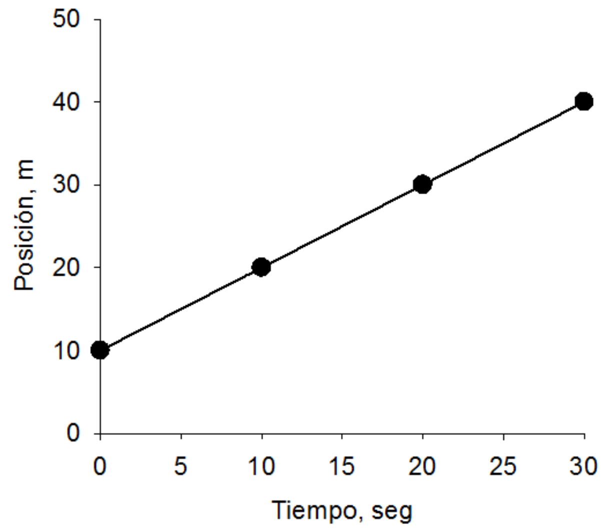


Noten que a tiempo 0 (cuando comenzamos a medir cómo se mueve este automóvil) la posición es 10 m. En este caso, se considera que la trayectoria que vemos comienza a 10 m de la posición inicial. Es decir que nuestro sistema está referido a una posición inicial a 10 m del punto original.

Construyamos la tabla para realizar el gráfico que nos piden:

Tiempo (seg)	Posición (m)
0	10
10	20
20	30
30	40

Ahora grafiquemos:



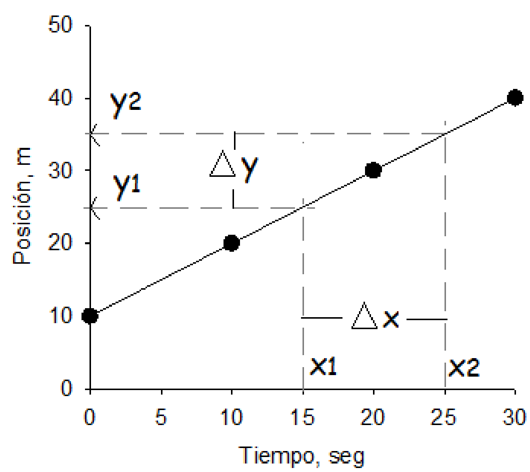
La función lineal que describe este caso es:

$$Posición = m \times x + 10\,m$$

Vamos a calcular "m" que, recordemos, es la velocidad media. Tomamos un Δx, por ejemplo entre 15 s y 25 s

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 25s - 15s$$
$$\Delta x = 10s$$

Y para esos puntos de x, interpolamos en la curva los valores de y (por las dudas no lo recuerden, observen en el gráfico):



$$\Delta y = y_2 - y_1 = 35\,m - 25\,m$$
$$\Delta y = 10\,m$$

Por lo tanto, la pendiente *m* será:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10\,m}{10\,seg} = 1\frac{m}{seg}$$

Es decir que la pendiente, que es la velocidad, es 1 m/seg. Observen que cuando se calcula la pendiente, la misma tiene como unidades el cociente entre las unidades de "y", y de "x".

De forma general, para cinemática la función lineal:

$$y = m \times x + b$$

Tendrá la forma:

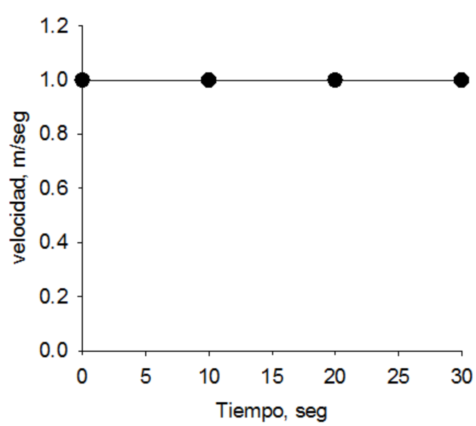
$$Posición = v \times (t - t_0) + Posición_0$$

Es decir, *y* es la posición del móvil, la pendiente *m* es la velocidad media, *x* es el tiempo tiempo (respecto del inicial), y la ordenada al origen *b* es la posición inicial del móvil ($Posición_0$). A esta última ecuación la llamamos **ecuación horaria**.

Dado que la pendiente de la recta es la velocidad media, cuanto mayor sea la velocidad, más empinado será el gráfico.

Tengan en cuenta que es esencial hacer los esquemas para resolver correctamente los ejercicios, ayudan a entender el enunciado y a resolver el problema. Ahorrar tiempo por no hacerlos, suele llevar a errores innecesarios.

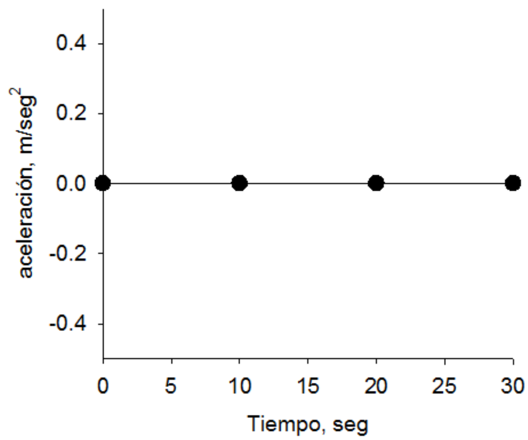
Dado que la velocidad es constante (en el ejemplo 1 m/s), si quisiéramos graficarla, para todo tiempo tendríamos el mismo valor, es decir sería una constante. El gráfico que obtendríamos sería el siguiente:



La velocidad es contante por lo que:

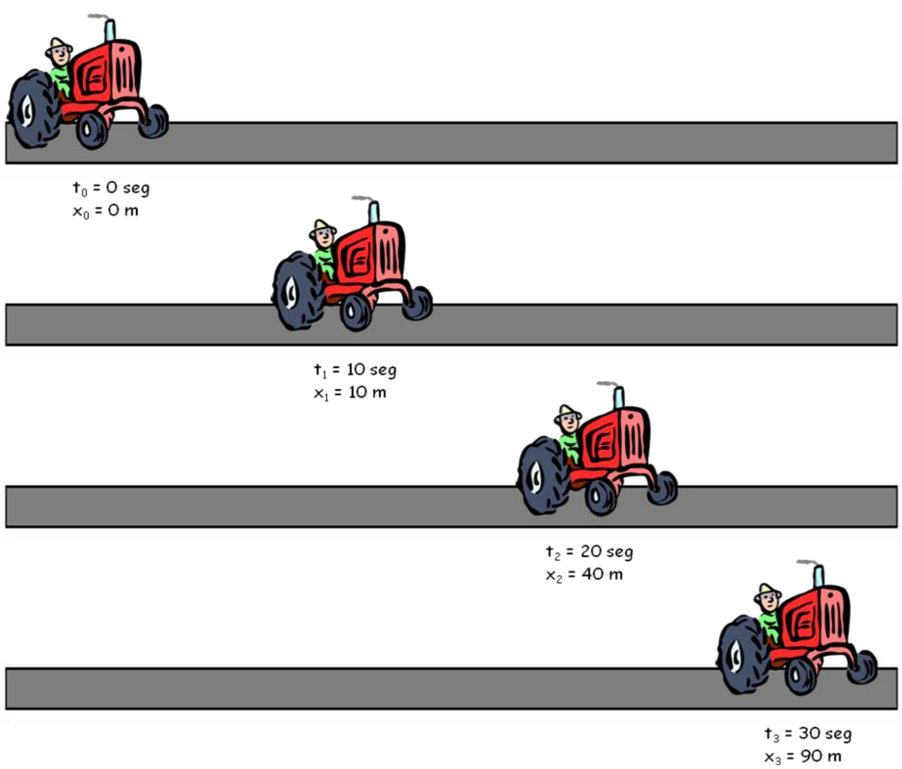
$$v = \text{constante}$$

Como el móvil no acelera, dado que dijimos que el movimiento era rectilíneo y uniforme, la aceleración es 0:



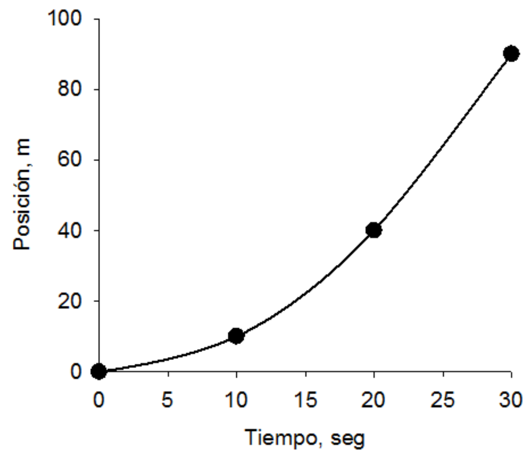
Movimiento rectilíneo uniformemente variado, MRUV

Este movimiento es muy similar al MRU, pero en este caso el móvil acelera, es decir que la velocidad no es constante. Vamos a ver este caso también con un ejemplo.



Tiempo (seg)	Posición (m)
0	0
10	10
20	40
30	90

Y lo graficamos:



Notemos que la función que describe este movimiento es una parábola. La ecuación horaria que describe la posición de un MRUV es:

$$Posición(t) = \frac{1}{2} \times a \times (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + Posición_0$$

Donde a, es la aceleración.

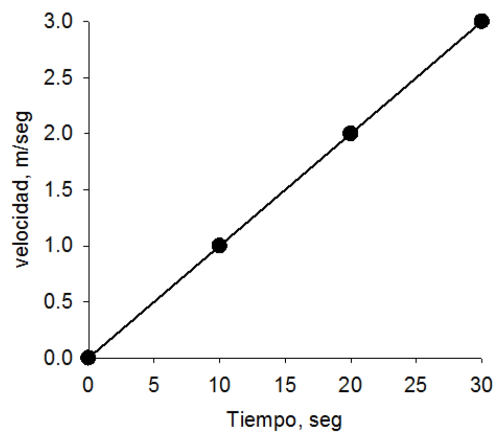
La velocidad en MRUV queda definida por:

$$v = v_0 + a \times (t - t_0)$$

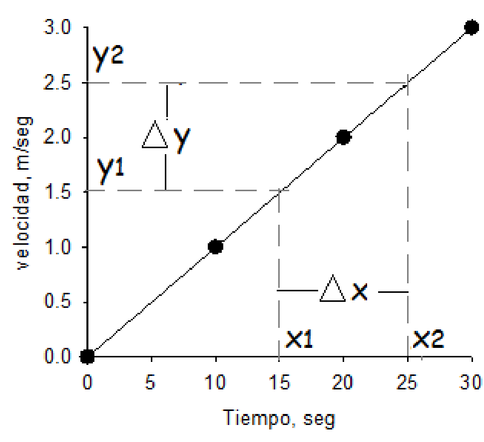
Vamos a construir la tabla de velocidades en función del tiempo. Para ello, simplemente tomamos los cuatro puntos de la tabla anterior y los dividimos por el tiempo:

Tiempo (seg)	velocidad (m/seg)
0	0
10	1
20	2
30	3

El gráfico de la velocidad en función del tiempo en un MRUV es una función lineal

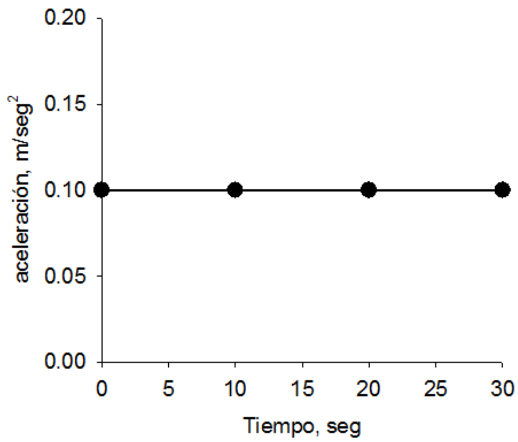


A partir del gráfico podríamos calcular la aceleración, dado que es la pendiente de la recta recién trazada. A partir del gráfico podemos determinarla como cualquier pendiente:



$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(2{,}5 - 1{,}5)\, m/s}{(25 - 15)\, s} = 0{,}1 \frac{m}{s^2}$$

La aceleración en MRUV, es un valor constante en el tiempo



Si la aceleración es positiva la velocidad aumentará en forma constante. La gráfica de posición será una parábola de concavidad positiva. Lo contrario ocurre si la aceleración es negativa (es decir, si el móvil va "frenando").

Movimientos verticales libres. Caída libre y tiro vertical.

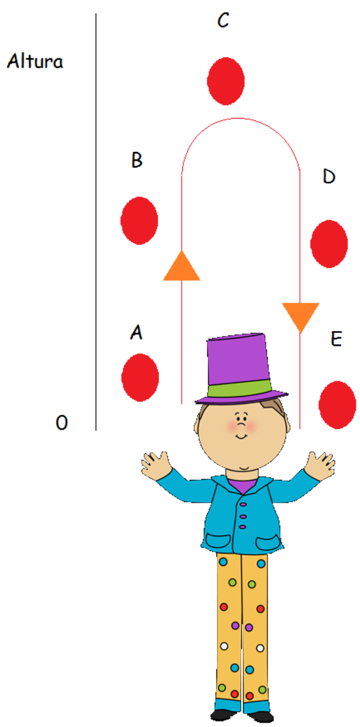
Si se arroja un objeto en forma vertical la trayectoria será una recta vertical y recibe el nombre de tiro vertical. Lo mismo ocurre si, en cambio, simplemente se suelta un cuerpo, y en ese caso se llama caída libre. La única diferencia entre ambos es la velocidad inicial (nula en el segundo caso). Llamaremos a ambos, movimientos libres verticales (MLV). Consideraremos en estos movimientos que no hay fuerza de rozamiento por su interacción con el aire.

Se los llama libres porque durante el vuelo nada los empuja ni los retiene (al menos aparentemente). Y lo que ocurre es que estos movimientos de trayectoria vertical son de tipo acelerado, MRUV, con aceleración constante igual a *g*, de forma tal que si están subiendo lo hacen cada vez más lentamente, y si están bajando lo hacen aumentando su rapidez.

La ecuación horaria que describe este movimiento es análoga a la de MRUV, sólo que la aceleración es la de la gravedad, y que ahora en lugar de desplazarnos en sentido horizontal lo haremos en sentido vertical (por eso lo llamaremos altura):

$$Altura = \frac{1}{2} \times g \times (t - t_0)^2 + v_0 \times (t - t_0) + Altura_0$$

$$v = g \times (t - t_0) + v_0$$

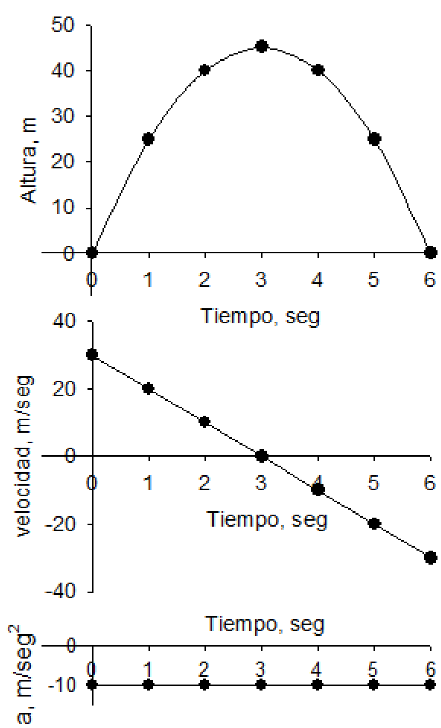


Miremos este ejemplo. Supongamos que un malabarista tira una pelota en tiro vertical. La altura de la pelota a t_o la consideraremos 0 m, la velocidad a la cual tira inicialmente la pelota es 30 m/s y aproximaremos la aceleración de la gravedad como *g* = -10 m/s² (En nuestro sistema de referencia, la aceleración de la gravedad será negativa. El signo de *g* depende exclusivamente del sistema de referencia y no de si el móvil sube o baja).

Entonces la altura y la velocidad quedarán descritas por:

$$Altura = -5\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)^2+30\frac{m}{s}\times(t-t_0)$$

$$v = -10\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)+30\frac{m}{s}$$



En base a estas ecuaciones construiremos una tabla anotando los valores obtenidos entre los 0 y los 6 seg.

Tiempo, seg	Altura, m	v, m/s
0	0	30
1	25	20
2	40	10
3	45	0
4	40	-10
5	25	-20
6	0	-30

La altura alcanzada, como es de esperar por la ecuación, es bien descripta por una parábola, mientras que la velocidad en el tiempo es una función lineal. Dado que la aceleración es constante, la recta tiene pendiente cero.

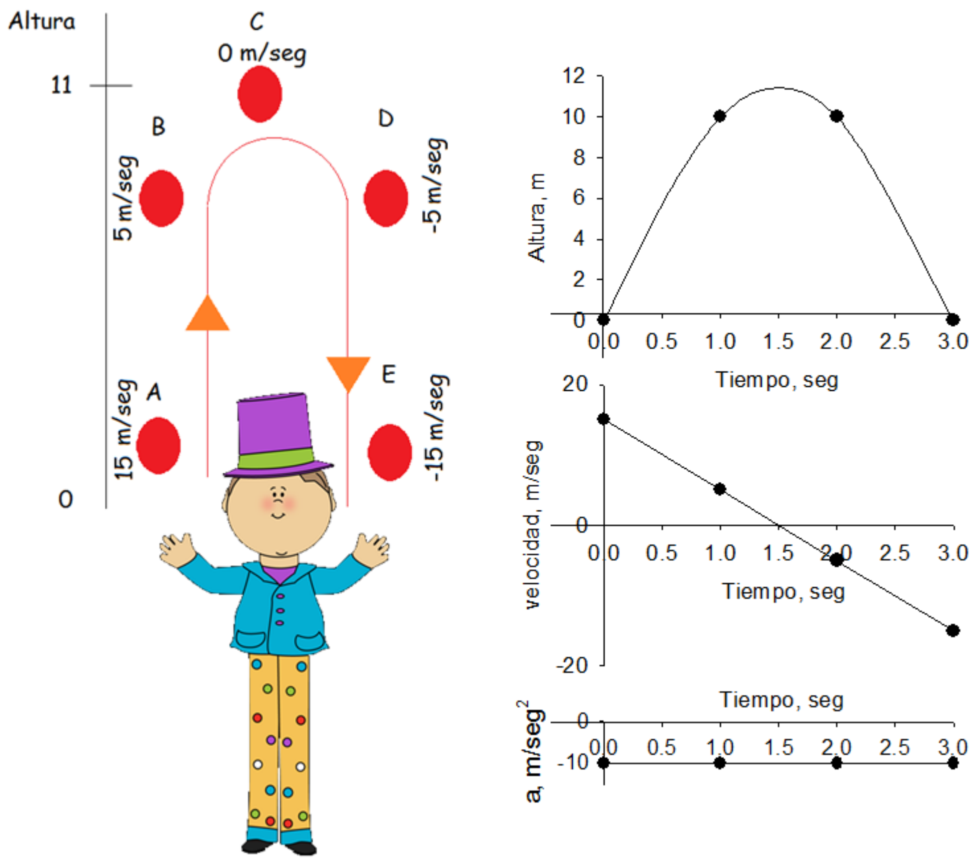
El área encerrada bajo la curva (la integral) del gráfico de velocidad en función del tiempo representa al desplazamiento del móvil (esto también se aplica a MRU y MRUV).

Volvamos a nuestro malabarista y supongamos que la velocidad inicial es de 15 m/s. Nuestras ecuaciones quedarían así:

$$Altura = -5\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)^2 + 15\frac{m}{s}\times(t-t_0)$$

$$v = -10\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)+15\frac{m}{s}$$

Y el esquema de nuestro malabarista quedaría así:



Notar que, a igual altura, el módulo de la velocidad es el mismo, y que la velocidad disminuye hasta hacerse cero en la altura máxima.

Se puede trabajar con un sistema de referencias de altura diferente. Este es el que adoptaremos en este curso. Cualquier otro sistema que deseen utilizar, corre por cuenta de los estudiantes saber aplicarlo apropiadamente.

Fuerzas y Leyes de Newton

Intuitivamente, todos sabemos qué es una fuerza. Sin embargo, no es necesariamente un concepto fácil de definir. El concepto de fuerza fue introducido originalmente por Arquímedes, aunque únicamente en términos estáticos. Galileo fue el primero en dar una definición dinámica y se considera que el primero que formuló matemáticamente la definición moderna de fuerza fue Newton. Podríamos decir que una fuerza es una magnitud vectorial que cuando actúa sobre un cuerpo tiene la capacidad de producir un movimiento o de alejarlo del estado de reposo.

Leyes de Newton

Las Leyes de Newton, atribuidas a Isaac Newton (1643-1727) fueron, en realidad, contribuciones de varios autores, aunque fue Newton quien las utilizó en su conjunto elaborando la Teoría Mecánica o Mecánica Clásica.

Primera Ley de la Dinámica: Ley de la inercia o Principio de Galileo.

La primera Ley de Newton establece que si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o actúan varias pero que se compensan entre sí, entonces el cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

Segunda Ley de la Dinámica: Ley de la masa o Principio de Newton.

La sumatoria de todas las fuerzas que recibe un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración.

$$\sum \vec{F}_y = m \times \vec{a}$$

Esta es una ecuación vectorial, dice que la sumatoria de todas las fuerzas que recibe un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración, y que la dirección y el sentido de la resultante serán iguales a la dirección y sentido de la aceleración (recordar que la masa no es un vector, es una magnitud escalar).

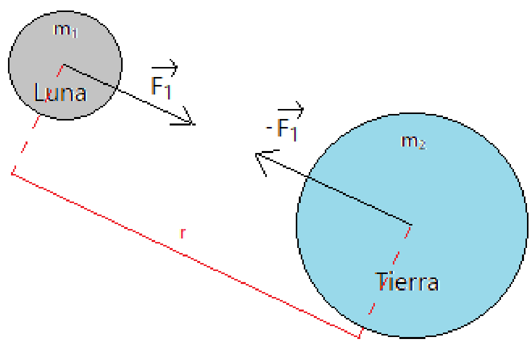
Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Ésta fue presentada por Isaac Newton en su libro Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, publicado en 1687, donde establece por primera vez una relación cuantitativa de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa. Newton dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos de diferente masa únicamente depende del valor de sus masas y del cuadrado de la distancia que los separa. También se observa que dicha fuerza actúa de tal forma que es como si toda la masa de cada uno de los cuerpos estuviese concentrada únicamente en su centro, es decir, es como si dichos objetos fuesen únicamente un punto, lo cual reduce la complejidad de las interacciones entre cuerpos más complejos.

En resumen, esta ley establece que dos cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (r) que las separa, y está dirigida según la recta que une los cuerpos. Dicha fuerza se conoce como fuerza de la gravedad o fuerza gravitacional y se expresa de la forma:

$$\vec{F} = \frac{G \times m_1 \times m_2}{r^2}$$

Donde F es la fuerza gravitatoria, siempre de atracción entre los cuerpos, siendo su unidad de medida en el SI el newton (N), G es la constante de gravitación universal, que no depende de los cuerpos que interaccionan y cuyo valor es 6,67 x 10^{-11} N·m^2/kg^2, m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos que interaccionan. Su unidad de medida en el SI es el kilogramo (kg), r es la distancia que los separa.



Tercera Ley de la Dinámica: Principio de Acción y Reacción.

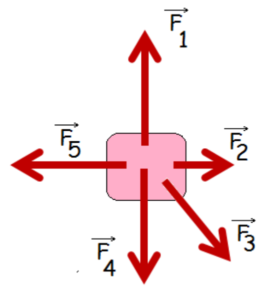
Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el otro aplica una fuerza sobre el primero de igual módulo, igual dirección y sentido opuesto a la que el primero ejerce sobre él. Esto quiere decir que siempre dos cuerpos se atraen, se repelen, se empujan, o cualquier otra variante, pero siempre pasa algo.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

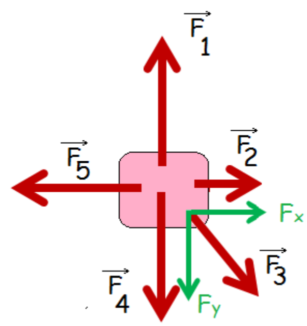
Para comprender cómo las fuerzas afectan el movimiento de un objeto será importante esquematizar el cuerpo sobre el cual actúan las fuerzas y en qué dirección y sentido lo hacen. A esos esquemas se los llama “diagramas de cuerpo libre” (DCL).

Diagrama de cuerpo libre

El diagrama de cuerpo libre (DCL) es un esquema sobre el que indicamos con vectores todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Un diagrama podría ser:



Acá por ejemplo tenemos fuerzas en tres direcciones, dado que $\vec{F}_3$ puede descomponerse en sus componentes en x e y, como aprendimos para vectores en el Unidad 1.



Ahora sí, tenemos sólo dos direcciones. Aplicamos las ecuaciones de fuerza de Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m \times \vec{a}_x = \vec{F}_2 - \vec{F}_5 + \vec{F}_{3x}$$

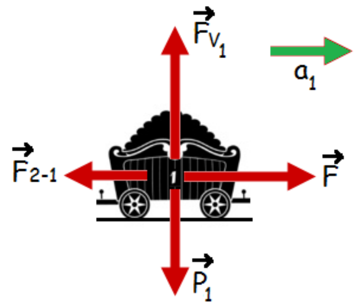
$$\sum \vec{F}_y = m \times a_y = \vec{F}_1 - \vec{F}_4 - \vec{F}_{3y}$$

Veamos un ejemplo, donde hay dos carritos conectados:

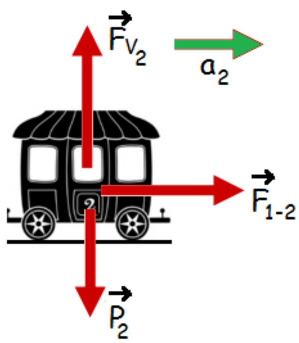
La masa del carrito "1" es de 80 kg, y la masa del carrito "2" es de 120 kg. Vamos a asumir que su movimiento sobre el piso no sufre fuerzas de rozamiento (una situación "ideal"). Ahora, aplicaremos sobre el carrito 1 una fuerza horizontal de 30 kgf (kilogramos – fuerza). ¿Cuál es la intensidad de la fuerza de contacto entre ambos?

Comenzaremos haciendo nuestro diagrama de cuerpo libre:

Empezaremos analizando qué ocurre con las fuerzas del carrito 1.



Existen cuatro fuerzas a tener en cuenta. La primera y más evidente es la fuerza horizontal (F) de 30 kgf que el enunciado dice se aplica sobre el cuerpo 1. La fuerza $F_{2\text{-}1}$, es la fuerza que el carrito 2 ejerce sobre el 1, dado que ambos están en contacto. P_1 es el peso del carrito 1, es decir la fuerza que surge de la atracción entre la tierra y el carrito. F_{V1} es la fuerza que las vías hacen sobre el carrito 1 para sostenerlo, que sería equivalente a lo que en física se llama "normal". En física, la fuerza normal (o N) se define como la fuerza que ejerce una superficie sobre un cuerpo apoyado sobre ella. Ésta es de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario a la fuerza ejercida por el cuerpo sobre la superficie.



Si hacemos lo mismo con el carrito 2, tendremos fuerzas análogas, exceptuando la fuerza horizontal, dado que esa actúa según el enunciado sólo directamente sobre el carrito 1.

Tanto la masa como la fuerza son magnitudes difíciles de definir. Con sólo definir una de las dos basta, ya que la otra queda definida por inferencia utilizando la Segunda Ley. Newton se murió preocupado porque esas dos magnitudes tan importantes en la Mecánica no estaban definidas. Recién 200 años después el físico llamado Ernst Mach (1838-1916) logró una definición de masa que convenciese a la comunidad científica. Sin embargo Newton se las arregló perfectamente con la aproximación más intuitiva del concepto de masa: es un escalar -un número- que nos indica la cantidad de materia que forma a un cuerpo. Mach definió a la masa como: "*la masa inercial no es una característica intrínseca de un móvil, sino una medida de su acoplamiento con el resto del universo...*".

Unidades de fuerza

Las unidades de fuerza quedan definidas por las unidades de masa y de aceleración

$$[\vec{F}] = [m] \times [\vec{a}]$$

De forma que, en el Sistema Internacional (SI) tendremos:

$$[\vec{F}] = kg \times \frac{m}{seg^2}$$

A este producto se lo denomina el Newton (N),

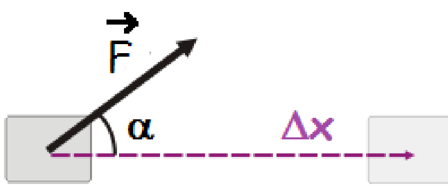
$$N = kg \times \frac{m}{seg^2}$$

Por lo tanto, en el SI la unidad de fuerza es el Newton.

Es muy popular medir la fuerza en kilogramo-fuerza, kgf. Solemos decir que pesamos 70 kg, aunque en realidad estamos hablando de 70 kgf (dado que el peso es una magnitud vectorial y el kg es unidad de masa que es una magnitud escalar), 1 kgf ≈ 10 N.

Trabajo. Fuerza de aplicación constante.

Se llama **trabajo** al producto entre una fuerza aplicada sobre un cuerpo y el desplazamiento del cuerpo en la dirección de esta fuerza. Se suele representar con la letra L o con W, y con un subíndice se aclara la fuerza a la que pertenece el trabajo expresado. Por ejemplo: W_F (el trabajo de la fuerza F) o W_{Res} (el trabajo de la fuerza Resultante). Para que haya un trabajo distinto de cero tiene que haber un desplazamiento del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza. Por ejemplo, en la situación siguiente:



Cuando la aplicación de la fuerza es constante, el trabajo de una fuerza W_F es:

$$W_F = F \times \Delta x \times \cos\alpha$$

donde *F* es el módulo o intensidad de la fuerza, *Δx* es el módulo del desplazamiento, y α es el ángulo que forman la fuerza con la dirección del desplazamiento. El trabajo es una magnitud escalar, no es un vector.

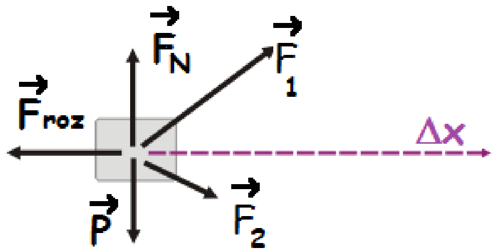
Las unidades surgen del producto de las unidades en las que se miden las fuerzas. En el SI:

$$W_F = N \times m = J$$

Al producto del Newton (N) por el metro (m), se lo conoce como Joule (J). Esta es una medida universal de energía que utilizaremos frecuentemente más adelante (todas otras formas de energía pueden convertirse en Joule).

Cálculo de Trabajo

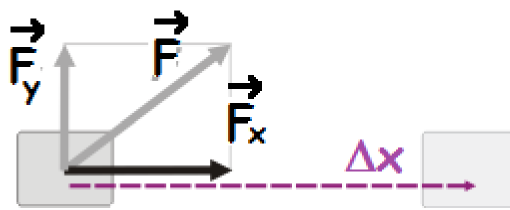
Supongamos que tenemos un cuerpo que se desplaza una cierta longitud *Δx*, sobre el que actúan varias fuerzas simultáneamente.



Como el trabajo resulta de la aplicación de la fuerza, podríamos calcular un trabajo asociado a cada fuerza. Lo que haremos para calcular el trabajo total es hacer la suma vectorial, para determinar la resultante en x (dado que es x el sentido de desplazamiento).

$$W_F = F_X \times \Delta x$$

Recordemos que esto es válido únicamente para fuerzas constantes, y su representación sería la siguiente:



El trabajo es una magnitud que surge de un proceso que transcurre en cierto intervalo de tiempo, y en el que hay algún desplazamiento. No es una magnitud instantánea, como la velocidad, o la energía, o tantas otras que se definen para un instante de cierto sistema.

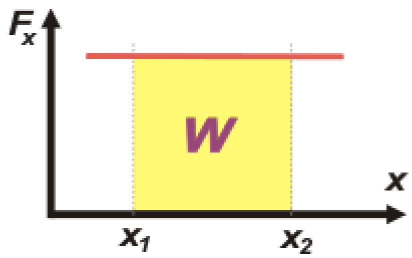
Otra propiedad del trabajo es que el mismo es igual a la resultante de la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas individuales que actúan sobre un cuerpo.

$$W_{Res} = W_{F1} + W_{F2} + W_{F3} + \ldots W_{Fn}$$

Trabajo. Fuerzas de aplicación no constante.

Cuando la fuerza es variable, es decir que su valor cambia en cada posición, se puede obtener el trabajo mediante el cálculo de la integral. Lo veremos en un ejemplo, comenzando con el caso más sencillo, cuando la fuerza es constante.

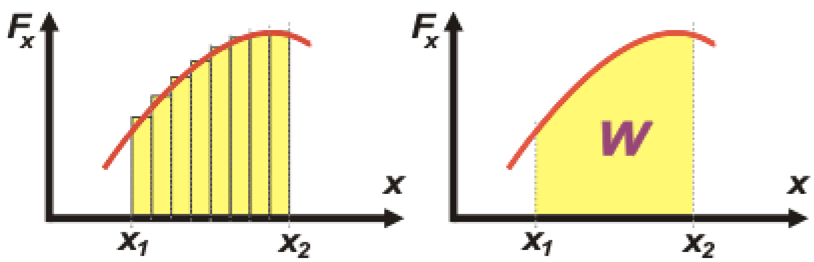
En el gráfico anterior, se observa una fuerza en función de la posición. En este caso en particular se trata de una fuerza constante, que tiene siempre el mismo valor, y donde el subíndice x indica que la fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento. Si tomamos dos posiciones cualesquiera y las llamamos x_1 y x_2, podemos calcular el "área encerrada baja la curva" como el área de un rectángulo (base por altura).



Esto es simplemente, el trabajo:

$$W_F = F_x \times (x_2 - x_1) = F_x \times \Delta x$$

Se puede obtener la fuerza de forma equivalente cuando la fuerza es variable, es decir que cambia de valor en cada posición. Esta vez, lo haremos calculando la integral que en su forma más sencilla sería fraccionándola en pequeños segmentos (como vimos en la Unidad 1). Esta aproximación se puede aumentar tanto como uno quiera haciendo cada vez más pequeños los segmentos de desplazamiento que después tendremos que sumar.



Entonces, si la fuerza no fuera constante, el trabajo se podría calcular como:

$$W_F = \int F \, dx \cos\alpha$$

Esto se lee así: el trabajo es igual a la suma integral de todos los productos entre el valor de la fuerza y el pequeño segmento de desplazamiento durante el que actúa la fuerza.

Energía y las Leyes de Conservación

Energía

Hace alrededor de unos 150 años apareció la idea o concepto de energía. La primera en aparecer fue la de energía cinética, E_C, asociada a la masa y a la velocidad de un cuerpo. Al poco tiempo se encontraron otras magnitudes que se relacionaban estrechamente con la energía cinética, otras formas de energía. Así tenemos a la energía potencial (E_P) asociada a la posición en la que se encuentra el cuerpo, la energía mecánica (E_M) como suma de la cinética y la potencial, la energía química, relacionada a los enlaces químicos de las moléculas del cuerpo, el calor (Q) forma de energía asociada al movimiento de las moléculas, energía eléctrica, asociada a las cargas eléctricas, energía nuclear, asociada a los núcleos de los átomos de un cuerpo, energía radiante, asociada a la radiación electromagnética, energía hidráulica, asociada al agua y la energía eólica, asociada al viento.

Una aproximación al concepto de energía es su definición como *la capacidad de un cuerpo o sistema para ejercer fuerzas y realizar trabajos sobre otros cuerpos*. La energía es un concepto central en la Física, y aprenderemos más de ella en la Unidad de Termodinámica. Un principio fundamental es el Primero: La energía total del universo permanece constante.

Energía Mecánica: Energía Cinética y Energía Potencial

La energía puede presentarse en la naturaleza de diferentes formas, todas transformables entre sí: energía térmica, mecánica, química, eléctrica, nuclear y electromagnética, entre otras. La energía mecánica es la que poseen los cuerpos debido a sus posiciones y velocidades relativas. No se trata de la suma de todas las energías posibles, pero es un buen recorte para empezar a hacer cálculos. Cuando no actúan fuerzas no-conservativas (rozamientos, fuerzas musculares, tracciones, motores, etc.) la energía mecánica no varía, se conserva.

En Física, **la energía mecánica** está definida entonces por la suma de dos formas de energía diferentes: la **energía cinética** (E_C) y la **energía potencial** (E_P):

$$E_M = E_C + E_P$$

La energía cinética, es la energía asociada fundamentalmente al movimiento. Se define como:

$$E_C = \frac{1}{2} \times m \times v^2$$

Donde "*m*" es la masa del cuerpo, objeto o sustancia expresada en Kilogramos y "*v*" su velocidad en metros/segundo. Si ponemos la masa y la velocidad en estas unidades el resultado nos dará la energía en Joule.

La energía potencial es la energía asociada a la posición de un cuerpo y se puede definir como:

$$E_P = m \times g \times h$$

A diferencia de la energía cinética, que era de un único tipo, existen 3 tipos de energía potencial: potencial gravitatoria, potencial elástica y potencial eléctrica. Aquí sólo presentaremos a la potencial gravitatoria, dado que la eléctrica la veremos en la Unidad 5 y la elástica no la veremos en este curso.

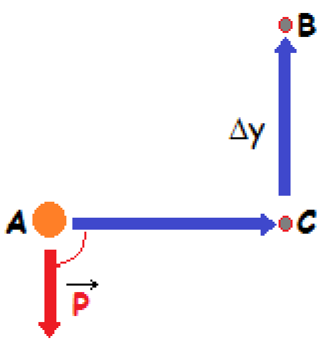
Fuerzas conservativas y no conservativas

Decimos que una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza sobre un cuerpo depende sólo de los puntos inicial y final y no del camino recorrido para llegar de uno a otro.

Las fuerzas no conservativas son aquellas en las que el trabajo realizado por las mismas es distinto de cero a lo largo de un camino cerrado. El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas depende del camino tomado. A mayor recorrido, mayor trabajo realizado.

Trabajo de la fuerza peso

El peso, que es una fuerza donde la masa de un cuerpo es acelerada por la gravedad, es una fuerza conservativa, es decir, que el trabajo no depende de la trayectoria sino de sus posiciones inicial y final exclusivamente.



Tomemos como ejemplo un cuerpo que se desplaza desde el punto A hasta el punto B, por el camino indicado con las flechas azules (la flecha roja indica el peso del cuerpo). Al trabajo realizado a través de este camino lo llamaremos ${}^1W_P$. Vamos a dividir el trabajo en dos tramos, el realizado desde A hasta C, y el trabajo desde C hasta B (Notar que C es un punto que está al mismo nivel que A y en la misma vertical que B).

$${}^1W_P = W_{A-C} + W_{C-B}$$

El trabajo de la fuerza peso desde A hasta C es nulo, porque el peso es vertical y el desplazamiento es horizontal, de modo que durante el viaje desde A hasta C, la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo de 90°, anulando el trabajo (recuerden que por su definición, $W_F = F \times \Delta x \times \cos\alpha$, y si $\alpha = 90°$, el $\cos\alpha = 0$, y por lo tanto $W_F = 0$).

Si a la diferencia de alturas entre C y B la llamamos Δy, nos queda que:

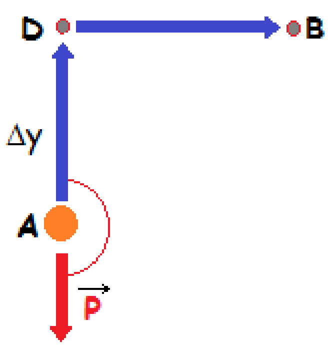
$${}^1W_P = 0 + P \times \Delta y \times \cos(180°)$$

$${}^1W_P = 0 + P \times \Delta y \times \cos(180°)$$

Dado que el cos (180°) es igual a -1 y que el peso "P" es igual al producto de la masa por la aceleración de la gravedad

$$^{1}W_P = -m \times g \times \Delta y$$

Ahora evaluemos lo mismo pero por otro camino ($^{2}W_P$) de trayectorias rectas, esta vez pasando por el punto D que se halla en la misma vertical que A y al mismo nivel que B:

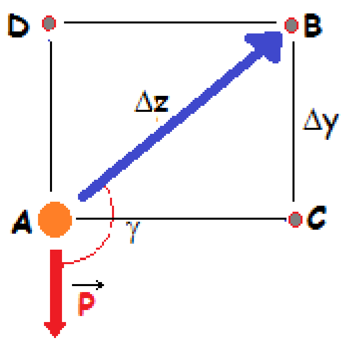


$$^{2}W_P = W_{A-D} + W_{D-B}$$

El razonamiento es idéntico al del camino anterior, sólo que ahora es el segundo tramo en el que el trabajo vale cero.

$$^{2}W_P = P \times \Delta y \times \cos(180°) + 0$$

Donde Δy es la misma diferencia de alturas que en el camino anterior, ya que AD está a la misma distancia que CB.



Entonces

$$^{2}W_P = -m \times g \times \Delta y$$

El mismo resultado que por el camino 1. Probemos ahora por el camino más corto y directo entre A y B, o sea por la recta que los une. A este camino lo llamaremos 3, y al segmento A-B, Δz.

$$^{3}W_P = P \times \Delta z \times \cos(\gamma)$$

El ángulo γ es igual a la suma de α + 90°, donde α es el ángulo B-A-C. Una relación trigonométrica importante en este punto es:

$$cos(\alpha - 90°) = -sin(\alpha)$$

Entonces:

$$^{3}W_P = -P \times \Delta z \times \sin(\alpha)$$

Dado que $\Delta z \times sin(\alpha) = \Delta y$, llegamos al mismo resultado que en los caminos anteriores.

$$^{3}W_P = -m \times g \times \Delta y$$

Y así podríamos probar por diferentes caminos, más o menos complicados, pero siempre obtendríamos el mismo resultado.

Trabajo de fuerzas no conservativas

El teorema principal de las fuerzas no conservativas dice que el trabajo de la resultante es igual a la variación de energía cinética:

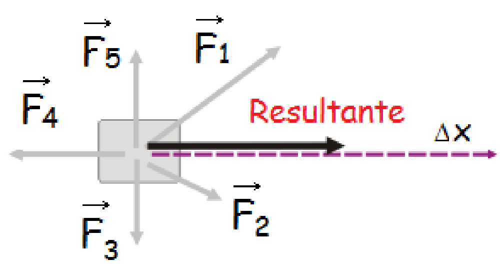
$$W_{res} = \Delta E_C$$

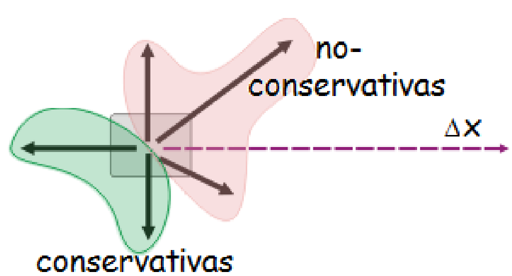
Asumamos que la fuerza resultante está integrada por varias fuerzas. Sabemos que el trabajo de la resultante será igual a la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas que integran la resultante:

$$W_{res} = \Delta E_C = W_{F1} + W_{F2} + \ldots + W_{Fn}$$

Supongamos que algunas de esas fuerzas son conservativas y otras no-conservativas. Separemos las fuerzas en estos dos grupos. Planteemos el trabajo de la resultante, como la suma del trabajo de las no-conservativas más el trabajo de las conservativas.

$$\Delta E_C = W_{no-conservativas} + W_{conservativas}$$





Como el trabajo de las fuerzas conservativas siempre resulta igual a menos la variación de una energía potencial (recordemos que en la sección anterior teníamos que $W_P = -m \times g \times \Delta y = \Delta E_P$), entonces:

$$\Delta E_C = W_{no-conservativas} - \Delta E_P$$

Fuerzas no conservativas y variación energía mecánica

Volviendo al concepto de energía mecánica, como la suma de las energías potencial y cinética, se puede calcular la variación de la misma calculando el trabajo de las fuerzas no conservativas:

$$W_{no.conservativas} = \Delta E_M$$

Recordemos que, si las fuerzas fueran conservativas, no existe una variación en la energía mecánica del sistema.

Fuerzas de rozamiento como ejemplo de fuerzas no conservativas

Desde los inicios de la historia se ha buscado el "móvil perpetuo" que sería una máquina ideal que permanezca indefinidamente en su estado de movimiento sin necesidad de un aporte externo de energía. Actualmente, sabemos que la existencia de este tipo de dispositivos no es posible dado que en el mundo real existen fuerzas disipativas o no conservativas, cuyo trabajo transforma la energía mecánica en otros tipos de energías más degradadas y por tanto menos útiles, provocando que la energía mecánica del sistema vaya disminuyendo y finalmente se agote.

Las fuerzas de rozamiento son un ejemplo de fuerzas no conservativas. La fuerza de rozamiento es una fuerza de fricción que existe entre dos superficies en contacto y se opone al movimiento relativo entre dos superficies (fuerza de fricción dinámica) o a la fuerza que se opone al inicio del deslizamiento (fuerza de fricción estática).

La fuerza de rozamiento entre dos cuerpos no depende del tamaño de la superficie de contacto entre los dos cuerpos, pero sí depende de cuál sea la naturaleza de esa superficie de contacto, es decir, de que materiales la formen. La magnitud de la fuerza de rozamiento entre dos cuerpos en contacto es proporcional a la normal entre los dos cuerpos, es decir:

$$F_R = \mu \times N$$

Siendo F_R, la fuerza de rozamiento, μ, es el coeficiente de rozamiento que depende de la superficie sobre la cual se desplace un cuerpo, y N que es el valor de la normal.

El trabajo realizado por estas fuerzas (negativo por oponerse al movimiento) disminuye la energía mecánica, que se va transformando en energía térmica y en otros modos de energía no recuperables. Aunque la energía mecánica no se conserve, sí lo hace la energía total del sistema, ya que la energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma (*Principio de conservación de la Energía, o 1er Principio de la Termodinámica, que veremos luego*).

Bibliografía

Alonso M, Rojo O. Física. Mecánica y Termodinámica. Fondo Educativo Interamericano S.A. México, 1979.

Anríquez CB. Guía de Física-Matemática para el Ingreso a Medicina. Universidad Nacional de Santiago del Estero, 2016.

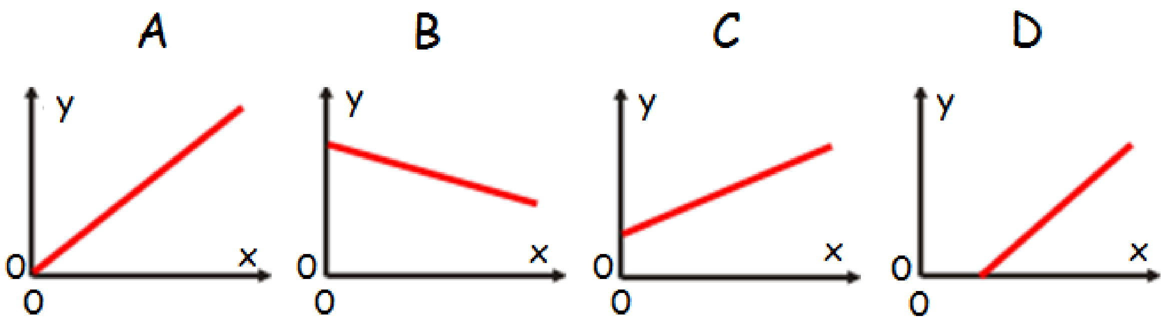
Cabrera R. No me salen. Apuntes Teóricos de Física y Biofísica del CBC, UBA. https://ricuti.com.ar/

Cromer AH. Física para las Ciencias de la Vida. Segunda edición, Ed. Reverte, 1996.

UNIDAD 2: Mecánica Clásica
Guía de Ejercicios

Ejercicios introductorios

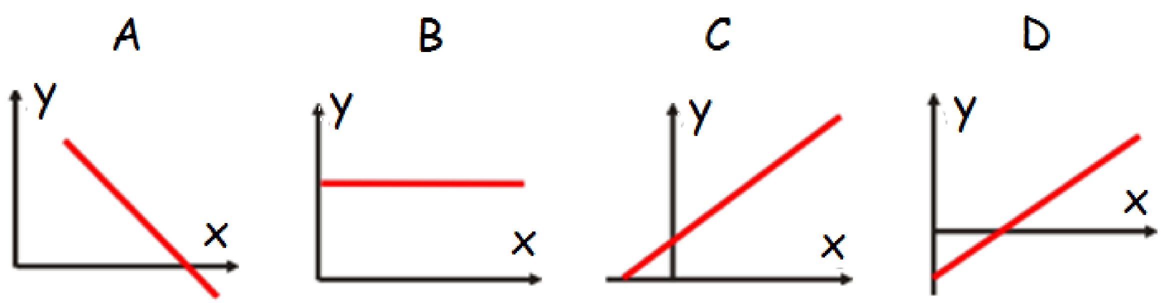
1. Dados los siguientes gráficos



Conteste si las afirmaciones son correctas. En todos los casos indique por qué:

a. La pendiente del gráfico A es mayor que la pendiente del gráfico C
b. La pendiente del gráfico C tiene un valor menor a cero
c. La ordenada al origen del gráfico C es un número mayor que la ordenada al origen del gráfico A
d. La ordenada al origen del gráfico D es un valor positivo

2. Dados los siguientes gráficos, donde los ejes x e y se intersectan en sus respectivos ceros:



Siendo y = posición de un móvil, y la variable x = el tiempo

a. Marque la ordenada al origen en los gráficos
b. Indique qué tipo de movimiento representan los gráficos
c. Escriba las ecuaciones horarias de posición
d. Indique cuál de los móviles está quieto
e. Indique en qué casos el(los) móvil(es) avanza(n) y qué caso(s) retrocede(n)

3. Considere un automóvil que se desplaza en MRU, siguiendo la ecuación

$$Posición = 3\frac{m}{seg} \times t + 10\ m$$

a. Grafique la posición en función del tiempo

b. Indique cuál es la velocidad a la cual se mueve el automóvil

c. Indique desde qué posición parte.

d. En qué posición se encontrará el móvil cuando $t_1 = 5$ s y $t_2 = 7$ s.

e. En qué instante el móvil pasará por los 40 m

4. Un coche recorre 160 kilómetros cada 4 horas a velocidad constante.

a. ¿Cuál es su velocidad en metros por segundos?

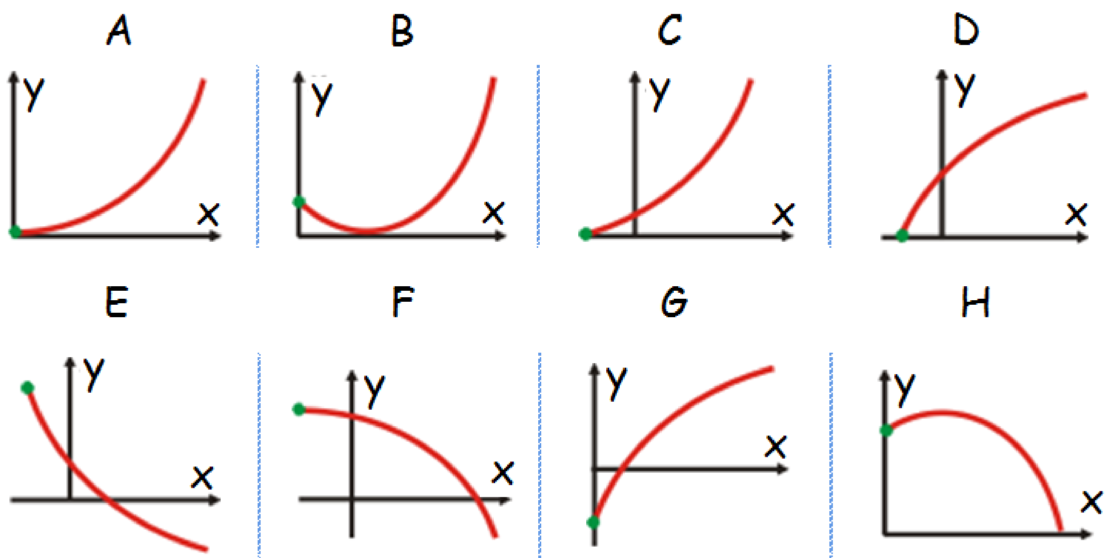
b. Determine cuánto se ha desplazado en 50 segundos, en 25 minutos, y en un día.

c. Grafique la posición en función del tiempo durante los primeros 15 minutos.

5. Un automovilista circula a 80 km/h. A qué hora debe pasar por la localidad A si desea alcanzar a las 13 horas en la localidad B a otro automovilista que circula a 40 Km/h y que pasó por la localidad A a las 8 horas?

6. Germán va en su bicicleta, con velocidad constante de 14 km/h, en una calle rectilínea siguiendo a Carina, que va corriendo en el mismo sentido, a 5 km/h, también con velocidad constante. Si inicialmente estaban distanciados 100 m, hallar cuánto tiempo después la alcanzará, y qué distancia avanzó cada uno. Graficar la posición-tiempo en función del tiempo de Germán y de Carina.

7. Dados los siguientes gráficos, donde los ejes x e y se intersectan en sus respectivos ceros:



a. Marque la ordenada al origen

b. Indique qué tipo de movimiento podrían representar los gráficos

c. Indique los puntos de intersección con los ejes

d. Indique qué gráficos tienen una concavidad positiva y cuáles una concavidad negativa

e. Indique en qué punto la velocidad del móvil es cero

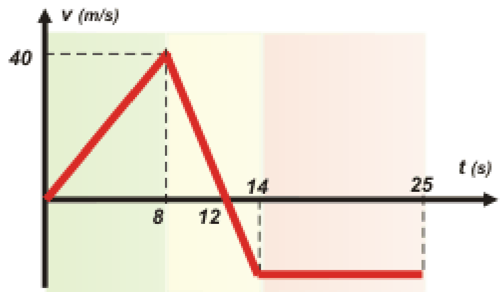
8. Dada la ecuación del MRUV:

$$Posición = 2\frac{m}{seg^2} \times t^2 + 10\ m$$

Indique en qué posición se encontrará el móvil en los instantes $t_1 = 5$ s, $t_2 = 7$ s, $t_3 = -10$s, y averiguar en qué instante pasará por la posición $x_4 = 32$ m.

9. Este ejercicio le ayudará a comprender las ecuaciones horarias y los gráficos del movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV). Un auto se desplaza en línea recta. En t = 0, pasa por un punto ubicado a 12 m del origen del sistema de referencia elegido, alejándose con velocidad 10 m/s. En ese instante acelera, con aceleración constante 2 m/s^2 que mantiene durante 5 segundos. Escriba la ecuación horaria para la posición, la velocidad y la aceleración. Grafique la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

10. Analizar el gráfico dado, que corresponde a un movimiento rectilíneo en varias etapas. Suponiendo que en t = 0 es x = 0,



a. Trazar los gráficos de aceleración y de posición en función del tiempo, determinando los valores correspondientes a los tiempos indicados.
b. Calcular la velocidad media del móvil, entre 0 y 25 segundos.

11. Desde el balcón del piso 15 de un edificio se deja caer una pelota. La misma llega al piso con una velocidad de 108 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al piso? (g= 10 m/s^2)

12. Un joven ejerce una fuerza constante de 200 N sobre un objeto que avanza 4 m en el plano horizontal. El trabajo realizado por el joven es de 400 J. El ángulo que forma la fuerza con el desplazamiento es:

a) 60° b) 30 c) 45°
d) 53° e) ninguna de las anteriores

13. El forzudo Igor levanta una pesa de 200 kg por encima de su cabeza, desde el suelo hasta una altura de 2 m.

a. Hallar el trabajo que realiza la fuerza peso de la misma, en el ascenso.
b. ¿La fuerza que ejerce Igor es constante? Hallar el trabajo que realiza esta fuerza. (Sugerencia: tener en cuenta que las velocidades, inicial y final de la pesa son nulas).
c. Calcular el trabajo que realiza Igor al mantener a la pesa en esa posición durante 10 segundos.
d. Desde la posición anterior, hace descender a la pesa hasta su pecho, quedando a 1,2 m sobre el suelo. Hallar el trabajo que realiza la fuerza peso de la misma, en el descenso.
e. ¿Qué trabajo habría realizado la fuerza peso, si Igor hubiera levantado la pesa desde el piso sólo hasta su pecho? Comparar con la suma de los trabajos hallados en a y en d.

14. Una cinta transportadora hace subir cajas a velocidad constante por una pendiente inclinada 35° respecto la horizontal. Durante este proceso la energía mecánica de las cajas ¿disminuye, aumenta o permanece constante?

15. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre un cuerpo y el suelo son 0,4 y 0,3, respectivamente. La masa del cuerpo es de 60 kg e inicialmente se encuentra en reposo apoyado sobre el suelo.

a. ¿Se lo puede mover aplicando una fuerza paralela al piso de módulo igual a 300 N?
b. En caso afirmativo, ¿cuál sería la aceleración del cuerpo?

Bibliografía

Cabrera R. No me salen. Apuntes teóricos de Física y Biofísica del CBC, UBA.
https://ricuti.com.ar/

Física, Problemas y Ejercicios. CBC, Universidad de Buenos Aires, 2001.

Física e Introducción a la Biofísica. CBC, Universidad de Buenos Aires, 2001.

Unidad 3. Hidrostática-Hidrodinámica
Contenidos

Fluidos

Generalidades. Densidad y peso específico. Unidades. Ejemplo de pasaje de unidades

Hidrostática

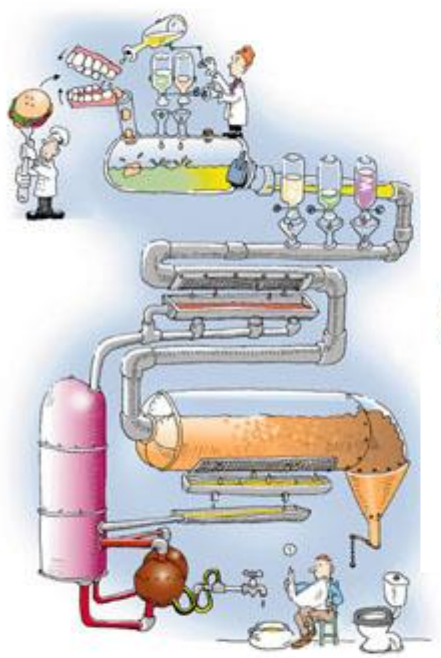
Presión hidrostática. Teorema general de la hidrostática. Principio de Pascal. Prensa hidráulica. Presión atmosférica. Tubo en U. Presión absoluta y relativa. Principio de Arquímedes. Empuje.

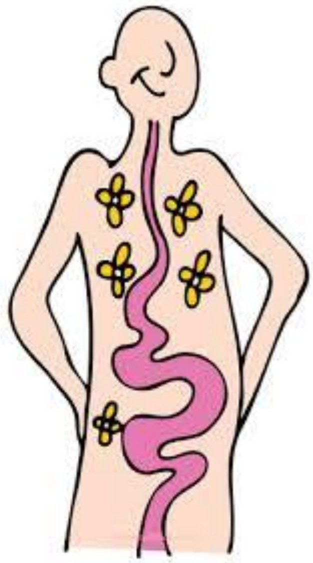
Hidrodinámica

Tipos de Flujo. Laminar y turbulento. Fluidos ideales. Perfil de avance de fluidos ideales. Caudal. Principio de Continuidad. Ramificaciones. Teorema general de la hidrodinámica. Fluidos Reales. Ley de Poiseuille. Perfil de avance de fluidos reales. Viscosidad de algunas sustancias. Sistema cardiovascular humano.

Unidad 3: Bases biofísicas de la fisiología cardiovascular y respiratoria

Fluidos y generalidades



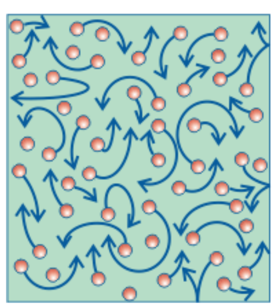


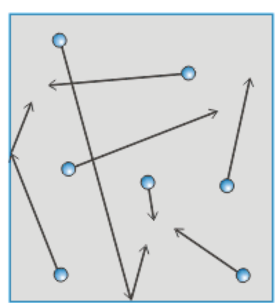
Los seres humanos somos una gran tubería caminando. Por dentro estamos llenos de caños, tubos, mangueras, fuelles, bolsas y otro conjunto de espacios anatómicos que contienen fluidos.

De modo que si queremos entender el funcionamiento del cuerpo humano, u otro ser vivo, debemos comenzar por el estudio de una serie de propiedades biofísicas que nos permitirán comprenderlo.

Los dos principales fluidos del cuerpo humano son los líquidos y los gases. El 75% del peso corporal humano es agua. Una persona adulta tiene un volumen de sangre (volemia) de unos 5 litros. Por otro lado los pulmones alcanzan, en una inspiración profunda, los 6 litros de aire, que es el principal gas (mezcla de gases) de interés en la fisiología humana.

Como lo dice la palabra, los fluidos, fluyen, es decir que se desplazan con poca dificultad. Esquemáticamente, los líquidos y los gases los pueden encontrar representados así (como todo lo que no vemos y queremos entender, es conveniente imaginar cómo lo veríamos).





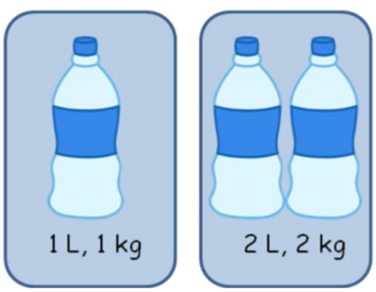
Las moléculas o átomos que conforman a los líquidos y a los gases están en movimiento constante, dado por su energía cinética. Sus moléculas se mueven en forma bastante caótica (desordenada). Rara vez las velocidades de sus moléculas son medianamente uniformes, ni en módulo ni en dirección ni sentido. Aún cuando veas un líquido en reposo, como el agua en un vaso sobre la mesa, sus moléculas están en movimiento incesante. Este movimiento continuo de las moléculas de los fluidos en reposo se llama movimiento browniano, en honor al botánico inglés Robert Brown, que lo observó por primera vez depositando pequeños granos de polen sobre una superficie de agua bajo un microscopio.

Los *líquidos* se caracterizan por tener sus moléculas relativamente cercanas, aunque no tanto como los sistemas sólidos. Esta cercanía se mantiene por las interacciones intermoleculares. Comparativamente, la densidad de un sistema líquido es mayor que la de un sistema gaseoso. Existe una propiedad que es muy importante en la Fisiología: los líquidos **son muy poco compresibles**, dado que tienen un volumen bien definido a una temperatura dada.

En los sistemas *gaseosos* las moléculas se mueven libremente, prácticamente sin interactuar entre sí. Rara vez chocan, salvo contra las paredes del recipiente, cuando las hay. La distancia entre moléculas es mayor que en los sistemas sólidos o líquidos, por lo tanto, los gases suelen tener muy baja densidad. Los gases son fácilmente comprimidos y expandidos.

Densidad y peso específico

Un kilo de agua ocupa un volumen de un litro, dos kilos de agua ocupan un volumen de dos litros y así, podríamos mantener la proporción entre la masa (*m*) y el volumen (*V*) de agua.



$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \frac{m_3}{V_3} = cte.$$

Esto es en realidad válido para todos los líquidos, existiendo una proporción entre la masa y el volumen fija (a una temperatura dada y constante). En el caso del mercurio (Hg), por ejemplo, tradicionalmente utilizado en los termómetros, en un recipiente de 1 litro podrían ingresar 13,6 kg de Hg.

De forma general, podemos expresar a esta relación como:

$$\delta = \frac{m}{V}$$

Donde δ (letra griega delta) es la densidad del líquido. Por lo tanto, podemos definir a la densidad como el cociente entre la masa y el volumen de una cantidad cualquiera de materia a una temperatura dada. En el caso del agua vale precisamente 1 kg/l. Las unidades de densidad son unidades de masa / unidades de capacidad:

$$[\delta] = \frac{kg}{L} = \frac{g}{mL} = \frac{kg}{dm^3} = \frac{mg}{\mu l} = etc...$$

NOTA: Utilizaremos la *V* (mayúscula) para indicar volumen y la *v* (minúscula) para indicar velocidad, en cinemática.

Cada sustancia tiene una densidad característica a una temperatura dada. Se dice que la densidad es una propiedad intrínseca, ya que no depende de la cantidad de sustancia que analicemos.
Si en lugar de considerar la masa de los cuerpos consideramos su peso (recordemos que éste es una fuerza), entonces obtenemos el peso específico que se designa con una letra griega llamada rho (ρ).

$$\rho = \frac{|\vec{P}|}{V}$$

Las barras (||) representan el módulo del peso (su valor numérico, y no como vector). Si además recordamos que el peso de cualquier cuerpo en las proximidades de la superficie terrestre es:

$$|\vec{P}| = m \times g \,,$$

podemos relacionar la densidad con el peso específico de la siguiente manera:

$$\rho = \delta \times g$$

En la tabla siguiente encontrarán algunas sustancias de importancia biológica, sus densidades y pesos específicos, como así de algunos otros líquidos y materiales.

	Densidad (δ)		Peso específico (ρ)		
	kg/L	Kg/m^3	kgf/L	kgf/m^3	N/m^3
Agua (4°C)	1	1.000	1	1.000	10.000
Agua de mar (25°)	1,025	1.025	1,025	1.025	10.250
Hielo	0,917	917	0,917	917	9.170
Sangre humana (37°C)	1,06	1.060	1,06	1.060	10.600
Plasma sanguíneo (37°C)	1,027	1.027	1,027	1.027	10.270
Alcohol	0,8	800	0,8	800	8.000
Aceite de oliva	0,92	920	0,92	920	9.200
Mercurio	13,6	13.600	13,6	13.600	136.000
Aire frío (0°C, 1 atm)	0,00129	1,29	0,00129	1,29	12,9
Aire caliente (100°C, 1 atm)	0,00095	0,95	0,00095	0,95	9,5
Planeta tierra	5,17	5.170	-	-	-
Madera balsa	0,12	120	0,12	120	1.200
Quebracho y algarrobo	0,7	700	0,7	700	7.000
Hierro	7,8	7.800	7,8	7.800	78.000
Plomo	11,4	11.400	11,4	11.400	114.000
Oro	19,3	19.300	19,3	19.300	193.000

OBSERVACIONES: Los dos únicos gases que aparecen en la tabla (aire frío y aire caliente) tienen una densidad unas 1.000 veces menor que el resto. En varias sustancias aparece una indicación de temperatura, dado que casi todas las sustancias se dilatan con el calor y, al *variar el volumen, varía también su densidad. Para líquidos y sólidos esta variación es prácticamente despreciable, pero para los gases es importante, no sólo la temperatura, también la presión. Nota: para el cálculo en N/m³, se utilizó un valor aproximado de aceleración de la gravedad de 10 m/seg².*

Unidades

Es útil cuando hay que hacer algún pasaje de unidades, usar los prefijos decimales que hemos mencionado en la Unidad 1, en la sección de mediciones. Recuerden, por ejemplo, que "mili" equivale a la milésima parte de la unidad (10^{-3}), "centi" a la centésima parte (10^{-2}), "deci" es la décima parte (0,1 ó 10^{-1}) y "kilo", es mil veces la unidad.

Ejemplo de pasaje de unidades

Vamos a convertir 760 mm^2 en su valor en m^2. La forma más sencilla posible es primero desglosar el prefijo en su significado:

$$760\,mm^2 = 760\left(10^{-3}\,m\right)^2$$

Luego, sacamos afuera el número que quedó encerrado entre paréntesis, sin olvidar elevarlo a la potencia 2, que es a lo que está elevado el contenido del paréntesis:

$$760\,mm^2 = 760 \times 10^{-6}\,(m)^2 = 7{,}6 \times 10^{-4}\,m^2$$

¡Y listo! Revisemos un pasaje de unidades que incluya un numerador y un denominador. Convirtamos 20 g/cm^3 en su valor expresado en kg/m^3. Procedemos igual que antes, transformando el numerador y el denominador de las unidades con las equivalencias. Por ejemplo, 1 g = 10^{-3} kg y 1 cm = 10^{-2} m:

$$20\frac{g}{cm^3} = 20\frac{(10^{-3}kg)}{(10^{-2}m)^3} = 20\frac{(10^{-3}kg)}{(10^{-6}m^3)} = 20 \times 10^3\frac{kg}{m^3} = 2 \times 10^4\frac{kg}{m^3}$$

Hidrostática

La hidrostática es la parte de la Física que estudia los líquidos en reposo ("hidro" – "estática"). El concepto fundamental para este estudio es el de **presión**. Quizás podamos asociar la idea de que si una persona voluminosa nos pisa en zapatillas, suele ser menos doloroso que si una señora nos pisa con un taco finito… muy finito.

Otro ejemplo es lo que observamos cuando apoyamos con fuerza una mano sobre la arena húmeda, apenas podemos dejar una huella de la mano. Sin embargo, si hacemos la misma fuerza con un solo dedo, podríamos penetrar la arena con facilidad.

Podemos definir presión (P) como:

$$P = \frac{|\vec{F}|}{A}$$

Siendo | $\vec{F}$ | el módulo de la fuerza aplicada y A el área sobre la que se aplica. Observar que la presión "*P*" a diferencia de " $\vec{P}$ " que representaba peso, no es una magnitud vectorial, si no que es un escalar (sólo importa su magnitud). Por lo tanto, cada vez que *P* aparezca sin su flechita, estaremos haciendo referencia a la presión.

Las unidades entonces serán unidades de fuerza sobre unidades de área:

$$[P] = \frac{kgf}{cm^2} = \frac{dina}{cm^2} = \frac{N}{m^2} = etc\ldots$$

En cuanto a la última, en particular, tanto la unidad de fuerza (N, Newton) como la de área (m^2), pertenecen al Sistema Internacional, y a esa relación se la considera la unidad de presión, y se le da el nombre de Pascal (*Pa*, también en el Sistema Internacional) en honor a Blaise Pascal, matemático y físico francés (1623-1662):

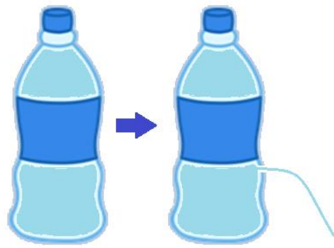
$$[P] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

100 Pa equivalen a 1 hPa (hecto Pascal). Otra unidad de presión conocida es la Baria, que equivale a

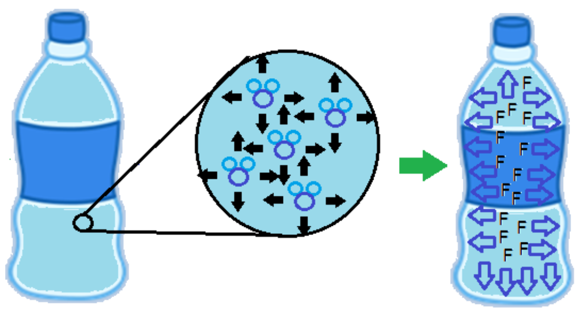
$$Baria = \frac{dina}{cm^2}$$

Presión hidrostática

Un recipiente lleno de líquido soporta la presión que el líquido ejerce sobre las paredes. Es decir, soporta la fuerza que las moléculas de líquido ejercen por unidad de área del recipiente. Si ese recipiente se rompiera por algún lado, el líquido saldría debido a la presión contenida.



Cada molécula del líquido ejerce una presión sobre las moléculas contiguas y así hasta llegar a las paredes del recipiente.

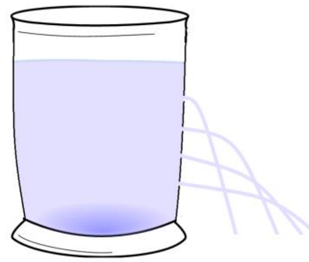


Imaginemos un camión repleto de vacas… más allá de lo permitido... Tan repleto que las vacas que están paradas cerca de la puerta tienen sus caras aplastadas contra ella. Eso es muy peligroso, porque si se abriera la puerta con el camión en marcha saldrían despedidas hacia una muerte segura (aunque convengamos que el destino matadero no es mucho más optimista… pero bueno…). Ahora, ¿qué pasa con la vaca que se encuentra en medio del camión? Está muy apretada… mucho… siente la presión por todos los laterales. Es decir, la vaca del medio la pasa tan mal como la que está contra la puerta. ¡Así, igual están las moléculas! Sintiendo la presión por todos lados.

Teorema General de la Hidrostática

El **Teorema General de la Hidrostática** es un caso particular del principio de Bernoulli que veremos luego. **Es un principio de conservación de la energía**.

Lo podríamos entender de la siguiente manera. Vamos a pensar en un recipiente lleno de líquido (supongamos agua). Si hacemos orificios a diferentes alturas del recipiente, veremos que dependiendo de si están más arriba o más abajo, el líquido sale con distinta fuerza. Si sale con más fuerza podemos asumir que en ese punto hay más presión. Veamos el recipiente:



La presión en un punto cualquiera de un líquido en reposo es directamente proporcional a la densidad del líquido y a la profundidad a la que se halla el punto. Esa expresión se conoce como el **Teorema General de la Hidrostática**:

$$P = \delta \times g \times h$$

O, su forma equivalente

$$P = \rho \times h$$

donde *P* es la presión, δ es la densidad del líquido, ρ el peso específico del fluido, *g* es la aceleración de la gravedad y *h* es la profundidad (medida como la diferencia de altura entre la parte superior del líquido y el punto que se mide).

Una consecuencia del teorema es que dos puntos a igual profundidad en un mismo líquido en reposo se hallarán sometidos a la misma presión, es decir que la diferencia de presión entre dos puntos situados a diferentes profundidades puede expresarse como:

$$\Delta P = \rho \times \Delta h$$

Veamos esto en un ejemplo: Hallar la diferencia de presión entre la superficie y el fondo de una pileta de 4 metros de profundidad llena de agua.

$$\Delta P = 10.000 \frac{N}{m^3} \times 4\, m = 40.000\, Pa = 400\, hPa$$

Notar que la presión en el seno de un líquido es independiente del ancho de la columna de líquido dado que sólo depende de la profundidad. Por ende, existe la misma presión en el fondo de un tubo vertical de 15 metros de largo lleno de agua y 5 cm de diámetro que en el fondo de un lago de 15 metros de profundidad.

Veamos otro ejemplo: ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre nuestros tímpanos cuando nos sumergimos a 4 metros de profundidad? Dato: considere que el área del tímpano es de alrededor de 3 cm².

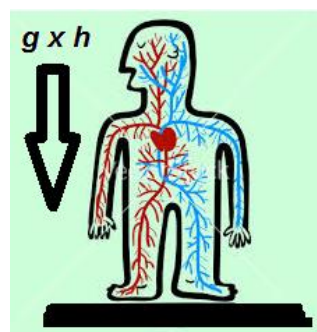
Entonces, sabemos que

$$P = \frac{|\vec{F}|}{A}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{F}\right| &= P \times A \\
\left|\vec{F}\right| &= (\delta \times g \times h) \times (A) \\
\left|\vec{F}\right| &= \left(1\frac{g}{cm^3} \times 10\,\frac{m}{seg^2} \times 4m\right) \times \left(3cm^2\right) \\
\left|\vec{F}\right| &= \left(1\frac{\left(10^{-3}\right)kg}{\left(10^{-2}m\right)^3} \times 10\,\frac{m}{seg^2} \times 4m\right) \times \left(3\left(10^{-2}m\right)^2\right) \\
\left|\vec{F}\right| &= \left(1\frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} \times 10\,\frac{m}{seg^2} \times 4m\right) \times \left(3 \times 10^{-4}m^2\right) \\
\left|\vec{F}\right| &= \left(10^3\,\frac{kg}{m^3} \times 10\,\frac{m}{seg^2} \times 4m\right) \times \left(3 \times 10^{-4}m^2\right) \\
\left|\vec{F}\right| &= \left(4 \times 10^4\,\frac{kg}{m^3} \times \frac{m}{seg^2} \times m\right) \times \left(3 \times 10^{-4}m^3\right) \\
\left|\vec{F}\right| &= 12\,N
\end{aligned}
$$

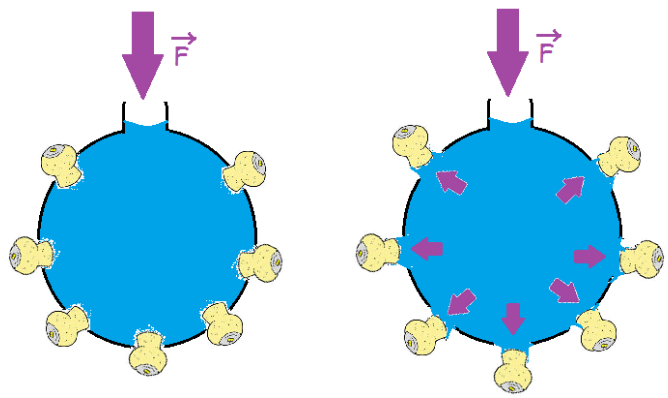
Para soportar esta fuerza aplicada sobre la membrana timpánica, los buceadores soplan fuerte con las fosas nasales obturadas. El aire se abre paso por unos conductos que conectan la garganta con el oído medio, llamadas trompas de Eustaquio, y empujan el lado interior de los tímpanos compensando la presión del agua.



Una consecuencia importante de este fenómeno surge del hecho de que el ser humano al ser un bípedo, debe soportar una diferencia de presión debido a su altura. La anatomía humana debió adaptarse para soportar diferencias de presión de la sangre, respecto de lo que era cuando era cuadrúpedo. Esa diferencia de presión recae sobre las paredes de las arterias y venas, que serían nuestras "cañerías", y sobre el corazón, que sería la bomba que impulsa el líquido interno, la sangre. Las arterias tienen una capacidad asombrosa de regular la presión de la sangre. Pero aún así la presión en las piernas es tan grande que toda la fuerza del corazón no alcanza para bombear el líquido y lograr el retorno venoso en penoso ascenso desde las profundidades de los pies.

Principio de Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) estableció que toda presión aplicada a un fluido confinado en un recipiente se transmite, sin reducción, a todos los puntos del fluido y también a las paredes del recipiente que lo contiene.



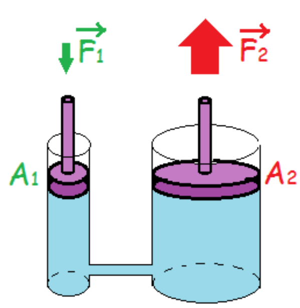
En la figura un líquido está contenido en un recipiente cuyos orificios están cerrados por corchos. Si se ejerce una fuerza donde muestra la flecha, la presión resultante se transmitirá a todas las partes del líquido, muy probablemente haciendo que los siete corchos salgan de sus posiciones. La diferencia de presión se transmitió a todas partes y direcciones por igual. Esto es lo que enunció Pascal como: "**La presión ejercida sobre un fluido incompresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y a todos los puntos del fluido**"

Es común confundirse en un punto. Este enunciado no indica que en todos los puntos del fluido exista la misma presión. Significa que si, por ejemplo, aumento en 100 Pa la presión en un punto, también aumentará en 100 Pa en todos los otros puntos respecto de su presión original.

La lógica de los fluidos es diferente a la lógica de los sólidos. Para describir un sólido lo primero que damos es la masa, para un fluido, la densidad. Los sólidos transmiten fuerzas, los fluidos presiones.

Prensa hidráulica

El principio de Pascal tiene una aplicación práctica directa en **la prensa hidráulica**, que consiste en un recipiente cerrado con dos émbolos (Un émbolo es una superficie deslizante dentro de un tubo). Uno de los émbolos es de área pequeña (el 1) y el otro grande (el 2).



Aplicando una fuerza, F_1, sobre el émbolo pequeño, se obtiene una fuerza mayor, F_2, en el émbolo mayor. Es decir, que el sistema actúa como un multiplicador de fuerzas. La explicación de su funcionamiento es justamente **el Principio de Pascal**. Dado que sabemos que dos columnas de líquido de idéntica altura tienen las mismas presiones y que la presión ejercida en un punto se transmite con igual intensidad a todos los puntos del líquido, entonces:

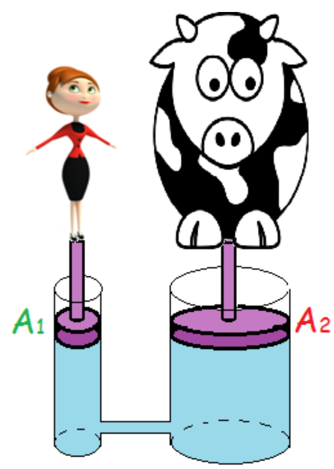
$$P_1 = P_2$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{A_1} = \frac{|\vec{F}_2|}{A_2}$$

Por lo tanto, la fuerza que llega al émbolo 2 será:

$$|\vec{F}_2| = \frac{|\vec{F}_1| \times A_2}{A_1}$$

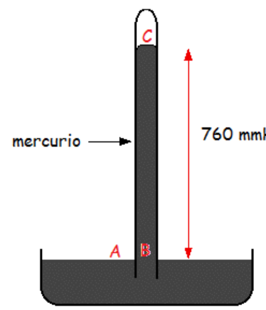
De modo que la fuerza resultante (2), será (A_2 / A_1) veces mayor que la fuerza original. Cuanto más grande sea la sección del émbolo grande respecto de la sección del émbolo finito mayor va a ser el factor de multiplicación de la fuerza.



Presión atmosférica

Evangelista Torricelli (1608-1647), un matemático y físico italiano discípulo de Galileo Galilei, fue el primero en medir la presión que ejerce la atmósfera sobre nuestros cuerpos. Normalmente no somos conscientes del hecho de que el aire que nos rodea presiona sobre nuestros cuerpos, aunque todos sabemos que algo sentimos cuando en la radio informan que hay "baja presión atmosférica". ¿Cómo hizo Torricelli para medir esa presión?

Torricelli realizó el siguiente experimento: Puso mercurio (Hg) en un tubo de vidrio de 1 m hasta casi llenarlo. Tapó el extremo del tubo con el dedo, lo dio vuelta y, sin separar el dedo, lo metió invertido dentro de una vasija que también contenía mercurio. Una vez dentro, retiró el dedo y observó que el mercurio del tubo sólo descendía unos centímetros. Repitió la experiencia varias veces y registró los datos. Así comprobó que la columna de mercurio variaba, según el día, en torno a una altura promedio de 760 mm (0,76 m). Tubos de distinto diámetro o altura alcanzaban siempre el mismo valor. Como en el extremo superior no había nada antes, Torricelli dedujo que tampoco había nada después: ese espacio que dejó arriba el mercurio quedaba, literalmente, vacío.



Usando el **teorema general de la hidrostática** podemos calcular la presión. Tomaremos un punto en la superficie que está expuesta al aire (A) y otro a la misma altura, pero dentro de la columna (B), por lo que está expuesto a la presión del líquido que tiene encima. Entonces,

$$P_A = P_B$$

La presión en A la ejerce la atmósfera. Y la presión en B obedece exclusivamente a la columna de mercurio, ya que sobre C no hay nada haciendo presión, siendo que la presión en C es 0 (hay vacío en ese punto). Luego:

$$P_B = \rho_{Hg} \times h$$

Dado que

$$\rho_{Hg} = 133.280 \ \frac{N}{m^3}$$

$$h = 760\,mm = 0{,}76\,m$$

$$P_B = \left(133.280 \ \frac{N}{m^3}\right) \times (0{,}76\,m)$$

$$P_B = 101.300 \ Pa$$

A Torricelli no le fue sencillo convencer a la comunidad de sus resultados dado que indicaba un valor de presión muy grande y que la idea de vacío no fue aceptada fácilmente por la humanidad en esos tiempos. A esos 101.300 Pa se les dio también el nombre de 1 atmósfera (atm), unidad de presión que comúnmente verán en los textos.

Algunas equivalencias útiles de las unidades de presión son: 1 atm = 76 cmHg = 760 mmHg = 101.300 Pa = 1.013 hPa

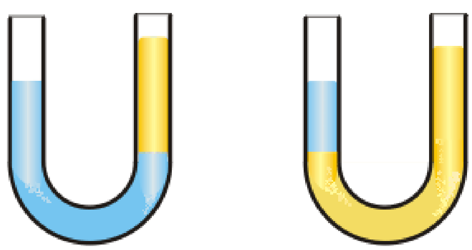
Para pensar

Un ser humano adulto tiene en total unos 2 m^2 de superficie corporal (piel) de modo que, dado que la presión atmosférica es de 101.300 Pa (N/m^2), en total la atmósfera lo comprime con una fuerza de 202.600 N. Entonces… ¿por qué no nos comprimimos?

La respuesta está en que no somos una bolsa de piel, solita, y compresible. Dentro de nuestro organismo fluyen líquidos tales como la sangre, por vasos de diferente calibre. Estos líquidos ejercen una presión en sentido contrario a la presión que ejerce la atmósfera… y es lo que nos ayuda a compensar la fuerza externa. De hecho, cuando el médico mide la presión arterial y nos dice que tenemos, por ejemplo, “13 / 7”, está haciendo referencia en realidad a 130 mmHg - 70 mmHg, como diferencia respecto de la presión ambiental. Es decir, nuestra presión interna es mayor que la externa. De allí que si una arteria se rompe, la sangre sale a chorros enormes… como si sacáramos un corchito…

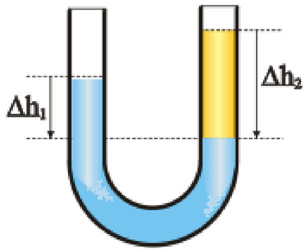
Tubo en U

Se trata de un tubo transparente doblado en forma de “U”, abierto en ambos extremos. Por cada rama se vierten dos líquidos de diferente densidad e inmiscibles entre sí. Por ejemplo, agua y aceite. No importa cuál ocupe el fondo del tubo (eso dependerá de cuánto pongamos de cada líquido), pero siempre ocurrirá que el de menor densidad va a quedar por arriba del más denso.



un tubo en U funciona igual aunque esté inclinado, o sus ramas tengan diferente largo o grosor

Los tubos en U permiten conocer la densidad de uno de los líquidos, conociendo la densidad del otro. Para ello se considera el nivel indicado por la superficie que separa los dos líquidos inmiscibles, que corta ambas ramas a la misma altura.



Como el líquido por debajo de ese nivel es de un sólo tipo, en este caso agua, la presión en ese nivel es idéntica en ambas ramas.

La superficie que queda al aire en ambos fluidos también es la misma: la atmosférica, de modo que la diferencia de presión de ambas columnas es la misma.

$$\Delta P_1 = \Delta P_2$$

Aplicando entonces el **teorema general de la hidrostática** en ambas columnas tenemos:

$$\Delta P_1 = \Delta P_2$$

Entonces

$\rho_1 \times \Delta h_1 = \rho_2 \times \Delta h_2$

$\delta_1 \times g \times \Delta h_1 = \delta_2 \times g \times \Delta h_2$

Por lo que

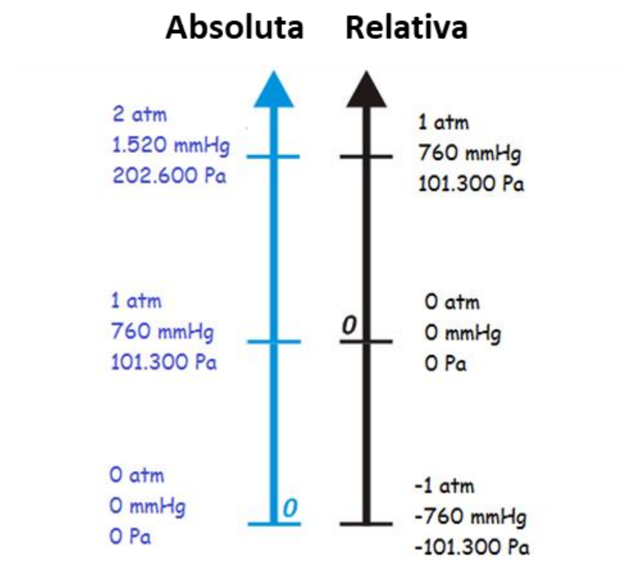
$\delta_1 \times \Delta h_1 = \delta_2 \times \Delta h_2$

Entonces, midiendo la altura de los líquidos y conociendo la densidad de uno de los líquidos, se puede conocer la densidad del segundo.

Nota de interés: Si el tubo en U se llena con un único líquido, la consecuencia es que el nivel superior en ambas ramas, por distantes que estuvieran, sería el mismo. Los albañiles suelen valerse de este fenómeno para ubicar posiciones de igual altura pero distantes. En lugar de un tubo de vidrio usan una manguera larga y transparente.

Presión absoluta y relativa

El teorema general de la hidrostática permite conocer la diferencia de presión entre dos puntos en el seno de un líquido, pero no nos indica dónde la presión vale cero, dado que ese valor de presión sería sólo el del vacío. Pero ese dato sirve de poco ya que no tenemos vacío dentro del seno de un fluido. Entonces se utiliza una escala relativa, que fija un cero de forma arbitraria, en el ambiente en que vivimos.



En lo cotidiano, cuando te dan una presión como dato, no se aclara si es relativa o absoluta. Hay que guiarse por el valor y el contexto. Por ejemplo, si decimos que la presión venosa es de 10 mmHg, está claro que se trata de un valor relativo… de lo contrario estaríamos siendo comprimidos tremendamente por la presión atmosférica.

Principio de Arquímedes

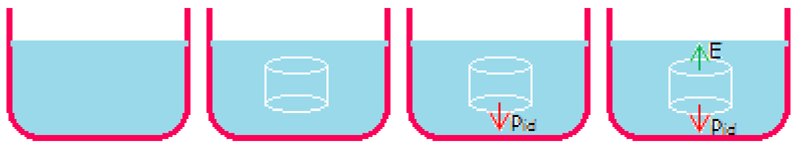
Arquímedes de Siracusa (287 AC - 212 AC) fue un físico y matemático griego considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad clásica (quizá el primero). Entre sus avances en física se encuentran sus fundamentos en hidrostática, estática y la explicación del principio de la palanca. Se considera que Arquímedes fue uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad quien dio una aproximación extremadamente precisa al número π. Arquímedes murió en Siracusa asesinado por un soldado romano.

Arquímedes y la corona del rey

Se dice que Arquímedes descubrió el concepto de **Empuje** o principio de flotabilidad tratando de resolver un problema con la corona del rey. El rey de esos tiempos en Siracusa dudaba que el joyero real estuviera construyendo sus coronas con todo el oro que se le daba… de hecho, temía que el joyero se estuviera quedando con parte del oro y lo sustituyera por otro material de menor valor. Así fue que le pidió a Arquímedes que averiguara cuán confiable era el joyero… pero le indicó que hiciera lo que hiciera, la corona debía volver intacta. Por ello era imposible fundirla para convertirla en otro cuerpo al que fuera posible calcularle su densidad (característica para cualquier material puro). Como se cansó de darle vueltas al asunto, se dice que decidió tomar un baño, y mientras hacía esto notó que el nivel de agua subía en la bañera cuando entraba. Así se dio cuenta de que ese efecto podría ser usado para determinar el volumen de la corona. Debido a que el agua no se puede comprimir, la corona, al ser sumergida, desplazaría una cantidad de agua igual a su propio volumen. Al dividir el peso de la corona por el volumen de agua desplazada se podría obtener la densidad de la corona. La densidad de la corona sería menor que la densidad del oro si otros metales menos densos le hubieran sido añadidos. Cuando Arquímedes, durante el baño, se dio cuenta del descubrimiento, se dice que salió corriendo desnudo por las calles, con tanta emoción por su hallazgo que olvidó vestirse. Según el relato, en la calle gritaba ¡Eureka!, (que significa ¡Lo he encontrado!).

Empuje

Se llama **empuje** a la fuerza que el líquido ejerce sobre un cuerpo, y es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo. Veamos concretamente en qué consiste el principio de Arquímedes.



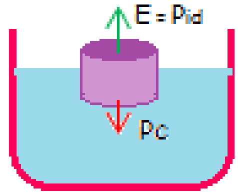
Miremos los esquemas. El primero es un recipiente con un líquido cualquiera, por ejemplo, agua. El segundo es el mismo recipiente, con la misma agua que antes, sólo que se marcó una pequeña porción de agua en su interior. Como se observa, está todo el reposo. Ahora pensemos por qué ese volumen interno de agua no se hunde ni tampoco emerge (sigue en reposo). ¿Por qué sigue todo quieto como al principio? La pregunta no es trivial, porque ese poco de agua que se identificó con las líneas blancas debe tener un peso. Al peso de esa parte de líquido la llamamos P_{ld}. ¿Qué lo mantiene flotando en su lugar? ¿Qué fuerza contrarresta esa atracción terrestre que lo tira para abajo?

Flota porque el agua que lo rodea le imprime una fuerza igual y contraria a la de su propio peso. A esa fuerza la llamamos empuje (E). Ahora saquemos el contenido de ese volumen, y pongamos en su lugar cualquier otra cosa con la misma forma: un bloque de madera, de plástico, de hierro, de lo que sea.

El líquido de alrededor seguirá haciendo sobre este nuevo cuerpo de un material diferente la misma fuerza que hacía antes cuando estaba el agua que desalojamos, ya que nada de ese líquido de alrededor ha cambiado. Luego, si el empuje es mayor que el peso de este nuevo cuerpo extraño, el cuerpo ascenderá y terminará flotando. Si el empuje resulta menor que el peso de este nuevo cuerpo extraño, entonces se irá al fondo.

Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido recibe de éste una fuerza hacia arriba llamada empuje que es igual al peso del fluido desalojado ($E = P_{ld}$). Se presentan básicamente tres posibilidades, que el cuerpo esté reposando en el fondo, que el cuerpo esté buceando o que el cuerpo esté flotando. El volumen de la parte inferior, el que queda bajo la línea de flotación, no es otro que el volumen de líquido desalojado. Según

Arquímedes, el empuje que recibe para poder flotar es igual al peso de ese líquido desalojado.



La flotación es un equilibrio, por lo tanto

$$E = \vec{P}_c$$

Siendo P_C el peso del cuerpo, y, según Arquímedes,

$$E = \vec{P}_{ld}$$

por lo tanto

$$\vec{P}_C = \vec{P}_{ld}$$

Podemos expresar los pesos en función de los pesos específicos o las densidades.

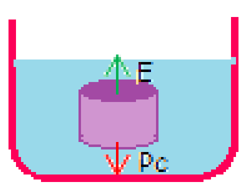
$$g \times \delta_C \times V_C = g \times \delta_{ld} \times V_{ld}$$

$$\delta_C \times V_C = \delta_{ld} \times V_{ld}$$

Y si el cuerpo tiene una simetría vertical, como en la figura, es decir: si su volumen es igual a la superficie de la base por su altura, entonces tenemos que

$$\rho_C \times h_C = \rho_{ld} \times h_S$$

donde h_c es la altura del cuerpo y h_s es su porción sumergida.



Ahora volvamos a la situación en la que el cuerpo estaba totalmente sumergido pero no sabemos cuál va a ser su destino. Si el empuje es mayor que el peso del cuerpo, entonces flotará y si el empuje es menor que el peso del cuerpo, se hundirá.

$$\vec{P}_C > \vec{P}_{ld} \quad \rightarrow \quad \text{se hunde}$$

$\vec{P}_C < \vec{P}_{ld}$ → flota

Pero cuando el cuerpo está sumergido, su volumen es igual al del líquido desalojado, de modo que podemos dividir ambos miembros por el volumen y se obtiene

$\delta_C > \delta_{ld}$ → se hunde

$\delta_C < \delta_{ld}$ → flota

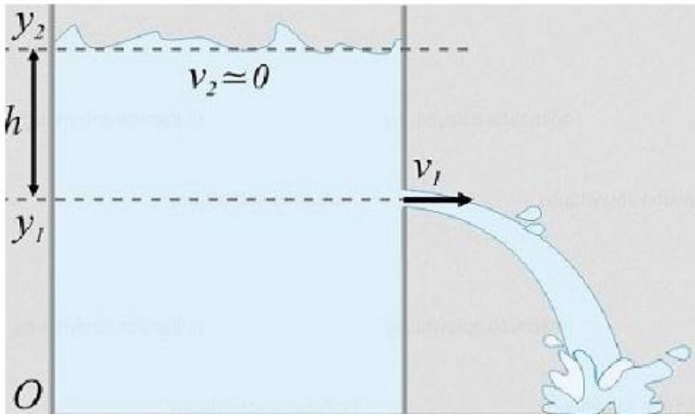
Por lo tanto, la flotabilidad de los cuerpos depende exclusivamente de la densidad relativa entre el cuerpo y el líquido en el cual está inmerso.

Nota de interés biológico: Cuando los cuerpos más densos que el fluido en el que nadan son muy pero muy pequeñitos, la velocidad con la que se hunden es muy lenta. Por eso hace falta media hora para que los glóbulos rojos se depositen en el fondo y puedas hacer una cuantificación razonable de su cantidad. El examen se llama hematocrito y consiste en extraer un poco de sangre al paciente y colocarlo en un tubo de vidrio. Cuando la decantación de glóbulos rojos finaliza, se observan claramente dos fases, la superior de plasma y la inferior del sedimento de glóbulos rojos y otras células. Lo normal es que esta fracción inferior represente la siguiente fracción del total.

Hombres: de 40,7 a 50,3 %
Mujeres: de 36,1 a 44,3 %

Teorema de Torricelli

El Teorema o Principio de Torricelli afirma que la velocidad de un líquido que sale por un orificio pequeño en la pared de un recipiente, debido a la fuerza gravitacional, es idéntica a la que adquiere un objeto que se deja caer libremente desde una altura igual a la de la superficie libre del líquido hasta el orificio.



Entonces, se puede afirmar que la velocidad de salida del líquido por un orificio que está altura h por debajo de la superficie libre del líquido, viene dada por la siguiente fórmula:

$$v = \sqrt{2.g.h}$$

Siendo *g* la aceleración de la gravedad y *h* la altura que existe desde el orificio hasta la superficie libre del líquido.

Hidrodinámica

Bien, hasta ahora mantuvimos a los líquidos quietos. Pero en nuestro organismo los líquidos se mueven bastante. La Hidrodinámica estudia el movimiento de los líquidos en relación con las causas que lo originan.

Tipos de Flujo

Las moléculas que componen un fluido real no avanzan ordenadamente en una corriente de fluido. Avanzan en el sentido de la corriente y además pueden desplazarse transversalmente. La trayectoria de las moléculas podría tener uno de estos dos comportamientos:

El flujo de la izquierda se llama **laminar**, dado que todas las líneas de circulación (o líneas de corriente) se desplazan una sobre otras siguiendo direcciones paralelas, como si fueran láminas que se desplazan. El flujo de la derecha se conoce como **turbulento**.

El flujo laminar es más predecible que el turbulento y de hecho es sólo para este flujo que son aplicables las **Leyes de la Hidrodinámica** que veremos aquí. Se lo conoce como flujo laminar dado que las moléculas parecen desplazarse en láminas de igual velocidad, que se envuelven unas a otras en forma concéntrica. Dependiendo de si el fluido es viscoso o no, el perfil de avance será diferente. En el desarrollo de este curso sólo consideraremos flujos laminares tanto para fluidos ideales como reales.

Fluidos ideales

Llamamos **fluido ideal** a aquel que fluye sin dificultad alguna, aquel cuya viscosidad vale cero. Tal fluido no existe en la realidad, pero en ciertas circunstancias se pueden aplicar algunas de sus propiedades y leyes de movimiento a los fluidos reales.

El modelo de fluido ideal simplifica mucho las cosas, por ello es fácilmente aplicable. Aunque a veces requiera correcciones, es importante saber que en la Física (y en la vida) siempre es más fácil intentar explicar las cosas con el modelo más sencillo. Cuando falla, siempre se puede ir reformulando para asemejarlo más a la realidad.

*En resumen, las propiedades de los líquidos ideales son las siguientes: tienen **viscosidad cero** (entendiendo por viscosidad a una medida de la dificultad para moverse en contacto con las paredes de un recipiente), son **incompresibles**, lo que equivale a que su densidad sea constante, circulan con un flujo que llamamos **laminar** (se desplaza ordenadamente sin hacer remolinos, ni reflujos), y **la velocidad de todas las moléculas del fluido en una sección transversal de tubería es la misma**.*

Perfil de avance de fluidos ideales

Cuando un fluido ideal se mueve a través de un tubo, todas las láminas lo hacen a la misma velocidad, dado que, al no haber rozamiento, no hay una fuerza que frene el movimiento. Las velocidades de las láminas se distribuyen como se muestra en el esquema de un corte longitudinal de una manguera mientras circula un fluido lineal en forma laminar:

Caudal

La medida fundamental que describe el movimiento de un fluido es **el caudal**. Decir que el río Paraná es más caudaloso que el río Dulce indica que el primero transporta más agua que el segundo en la misma cantidad de tiempo. A su vez, la cantidad de fluido puede medirse por su masa o por su volumen (siempre que su densidad sea constante, cosa que supondremos es así), de modo que:

$$caudal = \frac{masa}{tiempo} \qquad Q = \frac{m}{\Delta t} \qquad \text{(caudal de masa)}$$

$$caudal = \frac{volumen}{tiempo} \qquad Q = \frac{Vol}{\Delta t} \qquad \text{(caudal de volumen)}$$

Vamos a usar sólo la segunda versión del caudal, dado que es lo más simple para líquidos. Las unidades del Sistema Internacional, son:

$$[Q] = \frac{m^3}{seg}$$

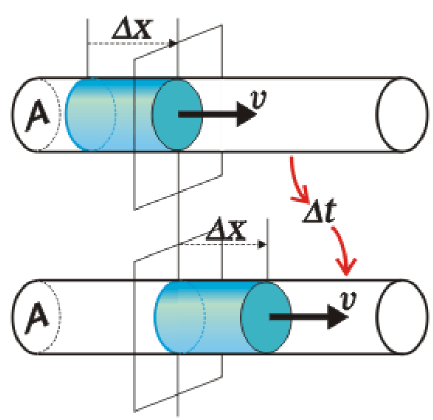
pero hay varias otras que se utilizan, sobre todo, en la clínica médica:

$$[Q] = \frac{L}{min} = \frac{mL}{h}$$

Recordar que se acostumbra a usar V (mayúscula) para volumen y v (minúscula) para velocidad. Ojo! También se usa la Q para el calor en Termodinámica.

El caudal se relaciona con la velocidad a la que se desplaza el fluido.

Consideremos un tubo por el que se desplaza un fluido. La sección interna (o área) del tubo es A y la velocidad a la que se desplaza cada molécula del fluido es v. Ahora tomemos arbitrariamente un cierto volumen dentro del tubo. Ese volumen (un cilindro) es igual a la superficie de su base (A) por la altura (un cierto Δx). Entonces,



$$V = A \times \Delta x$$

Al cabo de cierto intervalo de tiempo (Δt) todo el volumen habrá atravesado el área de adelante. Entonces, coloquemos esto en la definición de Q:

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

$$Q = \frac{A \times \Delta x}{\Delta t}$$

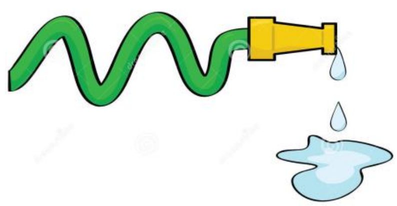
Dado que *Δx/Δt* es una velocidad (*v*) queda,

$$Q = A \times v$$

El caudal es igual al producto de la velocidad a la que se mueve el fluido por la sección del conducto por el que pasa el líquido. Este es un concepto fundamental que permite enunciar el **Principio de Continuidad**.

Principio de Continuidad

Vamos a pensar en una manguera que no tiene ninguna pérdida durante su longitud ni ingreso de agua por otro lado que no sea el extremo inicial. Entonces, es lógico pensar que si entra un volumen de agua por unidad de tiempo (caudal), deberá salir lo mismo por el otro extremo (todo lo que entra… sale). Esto equivale a decir que en todo el trayecto de la manguera no se crea ni se destruye agua.



Esto resume el **principio de continuidad**. Ahora lo ponemos en ecuaciones. Si llamamos Q_1 al caudal en un extremo 1 y Q_2 al caudal en el otro podemos resumir todo lo dicho escribiendo:

$$Q_1 = Q_2$$

Si lo escribimos de otra forma:

$$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$$

Es decir que dado que el caudal es constante, si el área de un extremo es menor que la del otro, debe ocurrir obligatoriamente lo contrario con las velocidades respectivas para mantener esa igualdad.

***Nota de interés médico**: La suma de todas las secciones (áreas) de todos los capilares del cuerpo se llama "sección ó área total" y es unas 1.000 veces mayor que la sección de la aorta. Por lo tanto la sangre se mueve en los capilares 1.000 veces más lento que en la aorta, lo que es lógico dado que tanto en las arterias como en las venas lo único que hace la sangre es viajar rápidamente. En los capilares, sin embargo, la función es el intercambio de solutos* *y es allí donde es necesario que pase un buen rato para cumplir con su función de entrega nutrientes y recolección de desechos.*

Teorema general de la hidrodinámica

No está del todo claro si fue el padre, Johann Bernoulli (1667-1748) o el hijo, Daniel Bernoulli (1700-1782), quien descubrió la fórmula que se conoce hoy como el **Principio de Bernoulli**. Esta ecuación *surge de la aplicación del principio de conservación de la energía mecánica a los fluidos*. Por caso general tomemos una corriente en un tubo de ancho variable que además cambia de altura. En esta corriente de fluido ideal se cumple que

$$E_M = \text{constante}$$

En otras palabras

$$E_M = \mathrm{E_P} + \mathrm{E_C} = \text{constante}$$

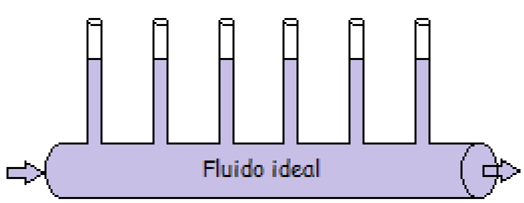
Reemplazando,

$$P + \delta \times g \times h + \frac{1}{2} \times \delta \times v^2 = \text{constante}$$

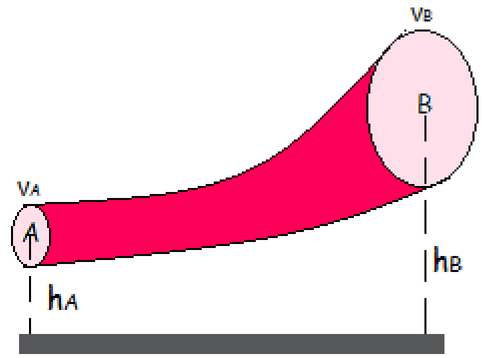
donde *P* es **la presión** y representa el trabajo que realiza la masa de fluido simplemente por estar en el tubo. A este término se lo llama **presión hidrodinámica**. El segundo es $\delta \times g \times h$ que representa **la energía potencial del fluido**, la energía que posee simplemente por estar a cierta altura sobre la Tierra. A este término se lo llama **presión hidrostática**. Proviene de dividir la energía potencial gravitatoria de una masa cualquiera de fluido ($m \times g \times h$), por su volumen. El tercer término ($\frac{1}{2} \delta \times v^2$), representa **la energía cinética** del fluido. Proviene de dividir la energía cinética, ($\frac{1}{2} m \times v^2$), por el volumen.

Por lo tanto, **el Principio de Bernoulli** viene a ser el *Principio de Conservación de la Energía* mecánica para los fluidos y se llega a él dividiendo la energía mecánica del fluido por su volumen.

En otras palabras, este principio asume que si hacemos circular un líquido por una tubería, donde se ubican tubitos laterales (manómetros), el líquido en cada manómetro alcanzaría siempre el mismo nivel (dado que no habría pérdida de energía).



Recordar que la energía mecánica se conserva sólo cuando no hay fuerzas no conservativas actuando ($W_{NC} = \Delta E_M$), de modo que el principio de Bernoulli sólo puede aplicarse a fluidos en los que la viscosidad (el rozamiento) sea despreciable. El principio de Bernoulli sólo se puede aplicar a fluidos ideales. Aún así, representa una herramienta sumamente útil y descriptiva.



Tomemos como ejemplo, una tubería de diferentes áreas en sus extremos A y B, por lo que

$$P + \delta \times g \times h + \frac{1}{2} \times \delta \times v^2 = \text{constante}$$

Entonces, tiene que ser válido que

$$P_A + \delta \times g \times h_A + \frac{1}{2} \times \delta \times v_A{}^2 = P_B + \delta \times g \times h_B + \frac{1}{2} \times \delta \times v_B{}^2$$

Las alturas deben considerarse hasta el punto medio de la sección. Recordemos que seguimos hablando de fluidos ideales.

Veamos dos casos particulares que se pueden deducir del Teorema de Bernoulli. Vamos a suponer que el fluido no fluye... que está quieto... estático. Si es así, $v_A = v_B = 0$, lo que hace desaparecer los términos de energía cinética:

$$P_A + \delta \times g \times h_A + \frac{1}{2} \times \delta \times 0^2 = P_B + \delta \times g \times h_B + \frac{1}{2} \times \delta \times 0^2$$
$$P_A + \delta \times g \times h_A = P_B + \delta \times g \times h_B$$

Vamos a reagruparlo:

$$P_A - P_B = \delta \times g \times h_B - \delta \times g \times h_A$$

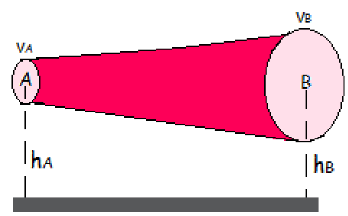
Y sacando factor común

$$\Delta P_{A-B} = \delta \times g \times (h_B - h_A)$$

$$\Delta P_{A-B} = \delta \times g \times \Delta h$$

no es otra cosa que el **Principio General de la Hidrostática**.

Ahora veamos otro ejemplo, donde el tubo es horizontal (no hay diferencias de alturas en la parte media del tubo)



Cuando h_A es igual a h_B, los segundos términos se cancelan:

$$P_A + \delta \times g \times h_A + \frac{1}{2} \times \delta \times v_A{}^2 = P_B + \delta \times g \times h_B + \frac{1}{2} \times \delta \times v_B{}^2$$

Si $h_A = h_B = h$

$$P_A + \delta \times g \times h + \frac{1}{2} \times \delta \times v_A{}^2 = P_B + \delta \times g \times h + \frac{1}{2} \times \delta \times v_B{}^2$$
$$P_A + \frac{1}{2} \times \delta \times v_A{}^2 = P_B + \frac{1}{2} \times \delta \times v_B{}^2$$

Para mantener esta igualdad, es necesario considerar que, si la velocidad en A aumenta, necesariamente deba disminuir la presión P_A, de otro modo no se mantendría la igualdad.

Fluidos Reales

Ahora veamos fluidos reales. Estos fluidos son aquellos que tienen **viscosidad**. La **viscosidad** es una medida de la dificultad para moverse estando en contacto con las paredes de los recipientes que los contienen. Es de alguna manera, análoga al rozamiento.

Intuitivamente, todos imaginarán lo que significa viscoso. Repasemos. Imaginen una botellita de edulcorante y otra idéntica pero que contenga miel. En ambos casos queremos que el contenido salga lo más rápido posible. Con el edulcorante, seguramente no tendremos problema, pero con la miel… a veces se complica. La fuerza que debemos hacer sobre las paredes es grande, y aún así sale muy lentamente (ni digamos si la miel era muy pura y se puso sólida…).

El fenómeno físico que aparece con la viscosidad es el de la resistencia al movimiento del fluido y la llamaremos R_h, **resistencia hidrodinámica**. No todos los fluidos tienen la misma resistencia hidrodinámica, y cuanto mayor sea ésta, más fuerza tendremos que aplicar para que el fluido se desplace. A mayor resistencia hidrodinámica, mayor presión tendremos que ejercer para su movimiento.

Si ejerciéramos la misma fuerza en los dos casos (edulcorante y miel), lo que cambiaría sería el caudal con el que sale cada fluido: el más resistente tendría menor caudal de salida. Entonces, *R* y *Q* son inversamente proporcionales.

$$\Delta P = Q \times R$$

A esta ecuación se la conoce como **ley de Ohm hidrodinámica**, por analogía con la ley de Ohm que estudiaremos en Electrodinámica, y que regula el flujo de la corriente eléctrica. Ambos flujos son análogos, y de allí que las ecuaciones que describen ambos fenómenos son muy parecidas.

Veamos un poquito, en qué unidades se mide la resistencia hidrodinámica:

$$[R_h] = \frac{[\Delta P]}{[Q]} = \frac{Pa}{m^3/s} = \frac{Pa \cdot s}{m^3} = Pa \cdot s \cdot m^{-3} = Pa \cdot s / m^3$$

Ley de Poiseuille

La resistencia hidrodinámica es inversamente proporcional al área a través de la cual circula el líquido (imagínense que cuanto más grande, menos roza con las paredes), y es directamente proporcional a la viscosidad (η) y a la longitud del tubo (*l*). Es decir que:

$$R_h = \frac{8\pi\eta l}{A^2}$$

que se llama ecuación o ley de Poiseuille, en honor al médico fisiólogo francés Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869), que llegó a esta ecuación interesado en las características del flujo de la sangre.

Recordando que el área transversal de un tubo cilíndrico es: $A = \pi \times r^2$, la misma ley puede escribirse así:

$$R_h = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

El primer factor (*8π*) es una constante numérica que surge de la geometría cilíndrica de los tubos y de la forma laminar en la que circulan. La cuarta potencia indica que la resistencia hidrodinámica es fuertemente sensible al radio del tubo. Una pequeña diferencia de diámetro de un caño implicará una gran diferencia de su resistencia hidrodinámica.

Las unidades de viscosidad en el Sistema Internacional son:

$$[\eta] = \frac{[R_h] \times [r^4]}{8l} = \frac{Pa \times s \times m^4}{m^3 \times m} = Pa \cdot s$$

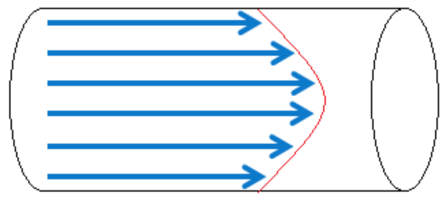
Incorporando esta definición de resistencia hidrodinámica en la ecuación $\Delta P = Q \times R$, podemos escribir la ecuación de caudal para fluidos reales como

$$Q = \frac{\Delta P}{R} = \frac{\Delta P}{\frac{8\eta l}{\pi r^4}} = \frac{\Delta P \pi r^4}{8\eta l}$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8\eta l}$$

Perfil de avance de fluidos reales

Cuando un fluido real se mueve a través de un tubo, la lámina más externa es la más lenta, debido a que está en contacto con la pared del conducto y es frenada por el rozamiento. La lámina siguiente se desplaza un poco más rápido y así sucesivamente hasta el centro, donde se halla la columna más veloz de la corriente. Las velocidades de las láminas se distribuyen como se muestra en el esquema de un fluido real que circula en forma laminar en una manguera:



Los vectores (flechitas azules) representan la velocidad de las moléculas ubicadas en sus respectivas láminas. Cuando hablemos de la velocidad del fluido nos estaremos refiriendo a un promedio de todas las velocidades de todas las láminas. Cuanto más viscoso sea un fluido, mayor será la diferencia de velocidad entre láminas.

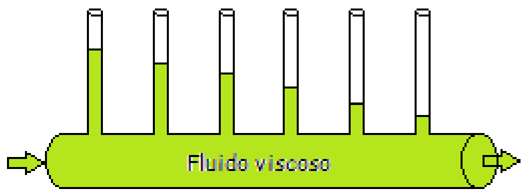
En el sistema cardiovascular del cuerpo humano, los flujos sanguíneos son laminares, salvo en el corazón, en el que debido a la forma de las cavidades y a las aceleraciones que el músculo cardíaco le impone al fluido se mueve de modo turbulento.

Viscosidad de algunas sustancias

Viscosidad, Pa x seg	
Agua (0°C)	$1{,}8 \times 10^{-3}$
Agua (20°C)	$1{,}0 \times 10^{-3}$
Aire (20°C)	$1{,}9 \times 10^{-5}$
Sangre (37°C)	$\backsim 4{,}08 \times 10^{-3}$ (variable)
Plasma (37°C)	$1{,}5 \times 10^{-3}$

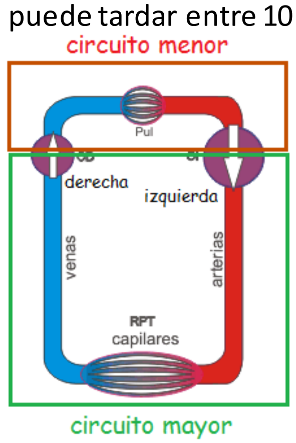
Una conclusión inmediata de la ley de Ohm hidrodinámica es que un fluido viscoso que avanza por una cañería horizontal va perdiendo energía por efecto de la viscosidad (fuerza no conservativa).

Existe una experiencia sencilla que pone al descubierto este efecto. Consiste en colocar a lo largo de un caño horizontal pequeños tubitos verticales, abiertos por arriba y espaciados uniformemente. Dado que el fluido que avanza lo hace con cierta presión, al encontrar la vía de escape ascenderá, pero sólo hasta cierto nivel (en el que la presión hidrostática en la parte inferior del tubito iguale la presión hidrodinámica dentro del caño). Lo que se observa es esto:



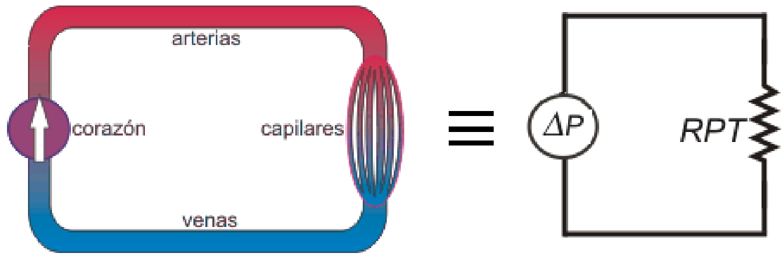
Sistema cardiovascular humano

El sistema cardiovascular humano consta de dos bombas fusionadas en un sólo órgano, el corazón, que impulsa la sangre por un circuito cerrado. El corazón se divide en cuatro cavidades, dos cavidades izquierdas (aurícula y ventrículo) y dos cavidades derechas (aurícula y ventrículo). El ventrículo izquierdo es la cavidad que expulsa la sangre oxigenada que recibe de la aurícula izquierda, hacia la arteria principal que es la aorta. Desde la aorta, la sangre viaja a las arterias, arteriolas y capilares. Es en estos últimos donde se realiza el intercambio de nutrientes y desechos, donde los desechos regresan con la sangre por las vénulas y venas hasta las venas cavas que llevan a esta sangre desoxigenada a la aurícula derecha, y de allí al ventrículo derecho. Todo este trayecto se conoce como circuito mayor. El circuito menor, es el que comienza en el ventrículo derecho que se conecta con el sistema pulmonar. En los capilares que rodean a los alvéolos pulmonares la sangre se oxigena y retorna hacia la aurícula izquierda, cerrando así el circuito menor. Un ciclo completo puede tardar entre 10 y 60 segundos.



La parte resistiva del circuito son los lechos capilares que irrigan a los distintos órganos. Todas estas resistencias están agrupadas en un único sistema paralelo.

En un esquema hidrodinámico simple (olvidándonos del circuito menor), el sistema cardiovascular humano puede representarse con un equivalente eléctrico. Aquí, lo que suministra la fuerza para el movimiento es el corazón, es decir es el que provee la diferencia de presión, ΔP, necesaria para hacer circular la sangre.

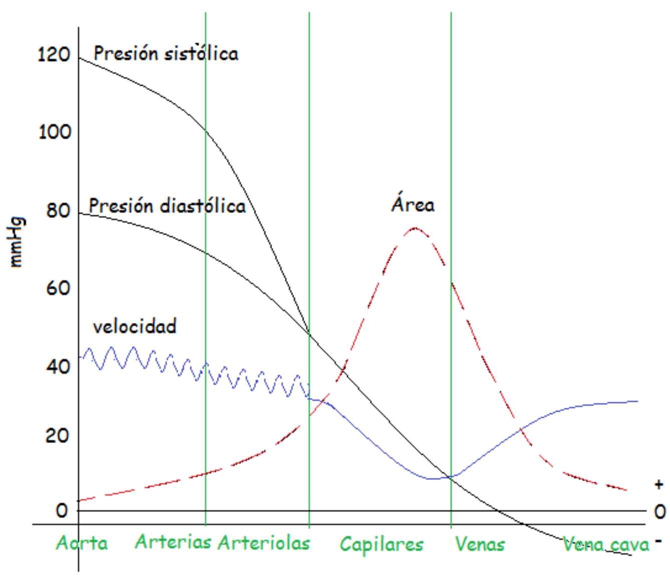


Esa diferencia de presión es igual a la que disipa el circuito debido a su resistencia hidrodinámica, acá representada como una única resistencia que recibe el nombre de resistencia periférica total (*RPT*).

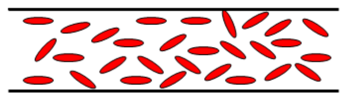
En seres humanos ΔP = 100 mmHg, y *RPT* = $1{,}6.10^8$ Pa.s/m^3

Las resistencias hidrodinámicas van variando según las necesidades del organismo. Si hay que salir corriendo, el sistema nervioso central autónomo (SNCA) cerrará las compuertas del suministro de sangre a la piel y abrirá al máximo el suministro a los músculos esqueléticos.

El gráfico siguiente detalla la respuesta de los diferentes vasos en el camino de la sangre. En la parte superior figura la presión de la sangre. La máxima caída se produce a nivel de las arteriolas y, fundamentalmente, los capilares. La caída de presión en las arteriolas es el blanco del sistema regulatorio, sobre el que actúa el SNCA para regular la presión del sistema y la eficacia del intercambio capilar. El resto es casi a presión constante.



Es importante saber que la ecuación de Poiseuille no es perfectamente aplicable a la circulación sanguínea dado que la viscosidad de la sangre es variable dependiendo de la zona vascular por donde circule. La sangre es básicamente una suspensión de glóbulos rojos. Cuando la sangre entra en una arteriola, los glóbulos rojos se ordenan y viajan apilados sin tocar las paredes del vaso en una disposición donde la viscosidad prácticamente se iguala a la del plasma haciendo el transporte más eficiente. Cuando los glóbulos rojos finalmente llegan a un capilar, les cuesta pasar, enlenteciéndose su movimiento lo que permite el tiempo necesario para el intercambio de solutos entre el tejido y la sangre.



Velocidad baja (ΔP bajo)

Velocidad alta (ΔP elevado)

Bibliografía

Alonso M, Rojo O. Física. Mecánica y Termodinámica. Fondo Educativo Interamericano S.A. México, 1979.

Cabrera R. No me salen. Apuntes teóricos de Física y Biofísica del CBC, UBA. https://ricuti.com.ar/

Chang R. Química, 10^{ma} Ed. McGraw Hill, 2010

Keidel WD. Fisiología. 2^{da} Ed. Barcelona, Salvat, 1979.

Mortimer RG. Mathematics for Physical Chemistry. 3rd Ed. Elsevier Academic Press: Burlington, MA and San Diego, CA, 2005.

Unidad 3: Hidrostática-Hidrodinámica

Guía de Ejercicios

1. Calcular el peso específico de un cuerpo de 11 cm^3 que pesa 33 $\bar{g}$ (gramo fuerza). Expresar el resultado en $\bar{g}/cm^3$.

2. Al sumergir un tubo de vidrio en una cubeta conteniendo mercurio (Hg), éste asciende 760 mm cuando se encuentra expuesto al aire. ¿Cuál es la presión atmosférica expresada en barias, si el peso específico del Hg (ρ) es 13,6 $\bar{g}/cm^3$?

3. Una columna líquida de 60 cm de altura ejerce una presión de 310 dy/cm^2. ¿Cuál es el peso específico del líquido en $\bar{g}/cm^3$?

4. El agua que llena un recipiente cilíndrico pesa 0,050 kg, el radio de la base es 1 cm. Calcule la altura. (P_{H2O} = 1 g/cm^3).

5. Calcular la fuerza que ejerce el agua en un recipiente cilíndrico cuya base tiene 4 cm de radio y 31 cm de altura.

6. ¿Cuál es la presión (en hPa) ejercida por una columna de agua (δ = 1 g/cm^3) de 50 m de altura? ¿Cuál es la altura que alcanzaría una columna de alcohol (δ = 0,85 g/cm^3) para ejercer la misma presión? g = 10 m/s^2.

7. El agua en el interior de una manguera se comporta como un fluido ideal. Consideremos una manguera de 2 cm de diámetro interno, por la que fluye agua a 0,5 m/s.

a) ¿Cuál es el caudal de agua que sale de la manguera?

b) ¿Qué volumen sale de la manguera en 1 minuto?

8. Un recipiente para guardar agua, abierto a la atmósfera por su parte superior, tiene un pequeño orificio en la parte inferior, a 6 m por debajo de la superficie del líquido

(a) ¿Con qué velocidad sale agua por el orificio?

(b) Si el área del orificio es 1,3 cm^2, ¿cuál es el caudal de agua que sale por el recipiente?

9. El agua fluye con un caudal de 6 m^3/min a través de una pequeña abertura en el fondo de un tanque cilíndrico, que está abierto a la atmósfera en la parte superior. El agua del tanque tiene 10 m de profundidad. ¿Con qué velocidad sale el chorro de agua por la abertura?

10. Dos vasos A y B contienen agua en equilibrio. El vaso A tiene una base de 2 cm^2 y contiene agua hasta 10 cm de altura. El B, tiene una base de 4 cm^2 y la altura de agua es de 5 cm.

¿Cuál es la presión debida al peso del agua en cada vaso a 4 cm de profundidad?
¿Cuál es la presión generada por el agua en el fondo de cada vaso?
¿Las presiones calculadas en a) y b) son las presiones totales?

11. En una jeringa el émbolo tiene un área de 2,5 cm^2 y el líquido pasa por una aguja de 0,8 mm^2 de sección transversal.

¿Qué fuerza mínima debe aplicarse al émbolo para inyectar el líquido en una vena en la que la presión sanguínea es de 1 cmHg?

12. Las suelas de los zapatos de una persona cuya masa es de 70 kilos tienen un área de 100 cm^2 cada una. ¿Qué presión ejerce la persona sobre el suelo cuando está de pie? Expresar el resultado en Pa.

13. Un líquido se encuentra en equilibrio dentro de un recipiente de sección uniforme cuya base tiene un área de 100 cm^2. La presión hidrostática debida al líquido sobre el fondo del recipiente es de 0,2 atm. Si se trasvasa el líquido a un recipiente semejante pero de 50 cm^2 de base, la presión ejercida por el líquido en el fondo será de:

a) 0,05 atm	b) 0,1 atm	c) 0,2 atm
d) 0,4 atm	e) 0,8 atm	f) 1,6 atm

14. El caudal medio de la sangre que circula en un tramo de un vaso sanguíneo que no presenta ramificaciones es de 1 litro por minuto. Considerando la densidad aproximada de la sangre 1 kg/L.
a) ¿Cuál es la velocidad media de la sangre en un tramo en el que vaso tiene un radio interior de 0,5 cm?
b) ¿Y si el radio interior del vaso es de 0,25 cm?

15. Por un caño horizontal fluye un líquido de viscosidad insignificante, densidad = 1000 kg/m^3 y velocidad 2 m/s. En un tramo la cañería se angosta disminuyendo su diámetro a la mitad. Entonces, la presión en la parte ancha de la cañería:

a) es inferior a la presión en la parte angosta en 6 kPa,
b) es inferior a la presión en la parte angosta en 30 kPa,
c) es igual a la presión en la parte angosta,
d) excede a la presión en la parte angosta en 6 kPa,
e) excede a la presión en la parte angosta en 12 kPa,
f) excede a la presión en la parte angosta en 30 kPa.

16. Calcular el caudal (C) y la velocidad (v) de circulación del agua (viscosidad = η = 1 centipoise (cp)) que circula por un tubo de 0,09 cm^2 de sección y 10 m de longitud, bajo una diferencia de presión de 20 mm Hg (ρ = 13,6 $\bar{g}/cm^3$).

Dato útil: 10 Poise (se pronuncia "Puá") es igual a 1 Pascal x segundo. La unidad más usada es la centésima parte, o centiPoise (cp).

17. Por un tubo cilíndrico de 28 m de longitud circula glicerina (η = 2 cp). ¿Cuál es el diámetro de dicho tubo, sabiendo que al aplicar una diferencia de presión de 300 Ba se obtienen 100 cm^3/seg de caudal?

18. Suponga que la sección de un vaso sanguíneo disminuye por contracción de la musculatura lisa de su pared a la mitad. ¿Cómo se modifica la velocidad de la sangre cuando se mantienen constantes todos los otros factores?

Unidad 4: La Termodinámica de los Seres Vivos
Contenidos

Calor y temperatura

Equilibrio térmico. Termómetros. Escalas termométricas: Celsius y Kelvin. Calorimetría con y sin cambio de fase. Transmisión del calor: conducción (ley de Fourier), convección (cualitativo) y radiación térmica (ley de Stefan-Boltzmann). Relaciones de escala: tamaño y tasa de intercambio.

Primer Principio de la Termodinámica

Sistemas abiertos, cerrados y aislados. Estados de equilibrio y estados estacionarios. Trabajo termodinámico. Calor. Primera ley de la termodinámica. Energía interna. Aplicación a gases y otros sistemas sencillos. Evoluciones abiertas y cerradas. Análisis gráfico.

Segundo Principio de la Termodinámica

Procesos reversibles e irreversibles. Segunda ley. Ciclos. Entropía. Rendimiento. Cálculo de variación de entropía en casos sencillos. El aumento de entropía del universo.

Energía libre y trabajo útil

El hombre como sistema termodinámico. Entalpía y energía libre.

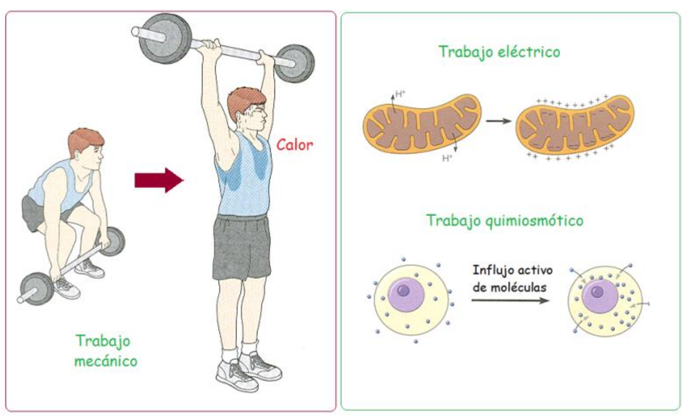
Unidad 4: La Termodinámica de los Seres Vivos
Introducción a la Termodinámica

¿Qué es la Termodinámica?

La Termodinámica es la rama de la Física que estudia las relaciones entre el calor y el trabajo o la energía mecánica y la conversión de uno en otro. Esta rama de la ciencia estudia las propiedades de los sistemas donde la descripción de los mismos requiere de la temperatura como coordenada. La importancia universal de esta ciencia radica en el estudio de los intercambios de energía a nivel macroscópico mediante conceptos generales como la presión, temperatura, volumen, y el número de moles de una sustancia. Es una de las teorías científicas más exitosas y productivas, y se puede aplicar a los fenómenos biológicos proveyendo información esencial para su conocimiento.

Energía

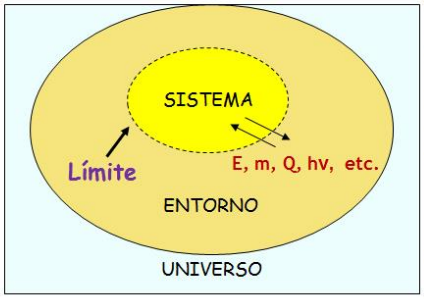
La energía puede definirse como la capacidad de producir **trabajo**. Estos cambios de estado a través de intercambios energéticos, ocurren mediante transferencias de calor y de trabajo. Existen distintos tipos de trabajo como se muestra a continuación, desde los más convencionales y conocidos, como el trabajo mecánico, tal como levantar pesas en el gimnasio (donde hablamos de mover una masa una determinada longitud), hasta los trabajos osmótico, eléctrico o químico que son esenciales para la vida de las células u organismos.

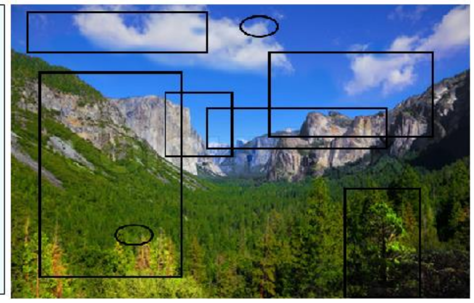


Trabajo. Existen distintas formas de trabajo. El trabajo mecánico, que consiste en el desplazamiento de una masa a lo largo de una distancia (levantar pesas, por ejemplo), y otros tipos de trabajo como el eléctrico y el quimio-osmótico, entre otros. Note en el levantador de pesas, que la realización de trabajo, conlleva un desprendimiento de calor del individuo al medio.

Los Principios de la Termodinámica

Existen tres Principios que son la base de la Termodinámica, de los cuales sólo veremos dos. Pero para que la Termodinámica se encargue del estudio de los intercambios de energía, necesitamos definir primero entre qué y qué ocurren, o sea el sistema en estudio y su entorno. Entonces… ¿qué es el sistema y qué es el entorno?





Sistema, entorno y universo. *Izquierda*. El universo contiene al sistema en estudio y al entorno en el que está inmerso. El sistema puede intercambiar distintas formas de materia y energía con el entorno. El límite entre el sistema y el entorno puede ser real o ficticio. *Derecha***.** El universo puede ser la totalidad de un paisaje y las distintas porciones en estudio (los rectángulos y óvalos marcados) representan distintos sistemas.

Llamamos **sistema** a la parte del universo que vamos a estudiar, y **entorno**, a lo que rodea al sistema. El sistema puede ser tan simple como una masa homogénea de materia o tan compleja, como podría ser un individuo. Por ejemplo, nuestro sistema podría ser el levantador de pesas, y el entorno el medio ambiente que lo rodea (por ejemplo, el gimnasio), o, nuestro sistema podría ser una porción de ese individuo, por ejemplo, una célula, y el entorno el resto del órgano donde está ubicada. Lo importante es que llamaremos sistema a aquello que nos permita evaluar la pregunta a responder.

Veremos también, que cada sistema tiene sus límites, es decir lo que lo separa del entorno. Los *límites* del sistema pueden ser reales, tales como las paredes de una caja, o no. En un individuo, el límite podría ser su piel, por ejemplo. ¿Qué hace la Termodinámica una vez que se elige al sistema? Lo estudia… y ¿qué estudia? Los intercambios de energía entre ese sistema y el entorno. En otras palabras, se mide la cantidad de calor y trabajo intercambiados, y se infiere la energía contenida y/o capaz de producir o intercambiar.

Dentro de los sistemas en estudio, tenemos distintos tipos. Un sistema es *abierto* si es posible que exista un flujo de materia y energía (calor y/o trabajo) con el entorno a través de sus límites. Por ejemplo, en la siguiente Fig., un vaso conteniendo un líquido es un sistema abierto dado que puede intercambiar energía en forma de calor y materia a través de la evaporación (por ejemplo, imagínense que el líquido está recién hervido). Si tan sólo puede ocurrir un intercambio de energía, el sistema es *cerrado*. Por ejemplo, en el recipiente de la siguiente figura, pueden ver el mismo líquido del vaso de precipitados, pero en un recipiente cerrado. En otras palabras, en este caso puede haber intercambio de calor a través del vidrio pero no de materia, dado que no tiene lugar por dónde evaporarse al ambiente. Si el sistema no intercambia ni materia ni energía con el entorno, se dice que el sistema está *aislado*. En el ejemplo de la siguiente figura, verán un termo (ideal), dado que no permite que haya flujo de calor o materia. Si este termo existiera, vendríamos dentro de 10 años y el agua estaría calentita para el mate tal como la hemos puesto en el termo hoy… por eso que decimos que es un termo ideal… pero para todos los fines prácticos en un intervalo de tiempo dado, el sistema funcionaría como un sistema aislado.

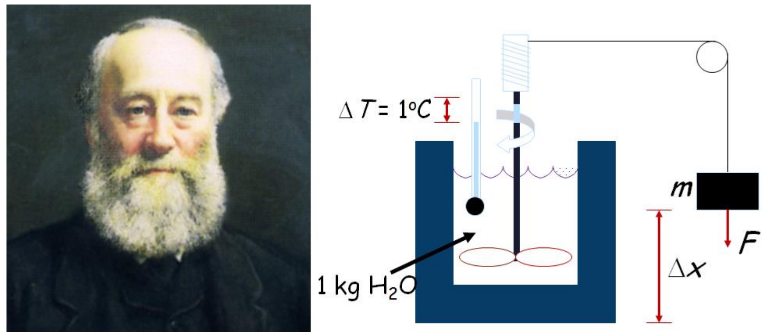
Los intercambios de energía entre el sistema y el entorno, ocurrirán por un proceso termodinámico determinado. Existirán infinidad de caminos para llegar a un estado dado, lo que veremos a lo largo de estas clases. Por ejemplo, el levantador de pesas, podría partir del estado con las pesas en el piso y llegar al estado 2, con las pesas elevadas de distintas formas. Podría levantarlas en un solo movimiento, o en dos movimientos consecutivos, o dejarlas sobre una tabla a mitad de camino para retomar el ejercicio. Cada una de esas vías sería un camino distinto para llegar del estado 1 al estado 2, y por ende, involucraría, distintos intercambios de calor y trabajo con el medio.

Abierto Cerrado Aislado

Tipos de Sistema. Un sistema abierto permite el intercambio de materia y energía con el medio, un sistema cerrado no intercambia materia, sólo energía con el entorno, y un sistema aislado no intercambia ni materia ni energía con el entorno.

Experimento de Joule

James Prescott Joule fue un físico británico que vivió entre los años 1818 y 1889. Su trabajo de investigación estuvo profundamente ligado a los intercambios de energía, y demostró que el calor y el trabajo eran formas intercambiables de la misma. Su experimento más famoso se muestra abajo, y consistió en colocar una pesa, moviéndose a velocidad prácticamente constante hacia abajo. De este modo, la pesa perdía energía potencial y realizaba trabajo mecánico ($W = F \times \Delta x$). Como consecuencia de este movimiento, las paletas que se agitaban imbuían a las moléculas de agua de energía cinética adicional, observándose que ahora el agua del recipiente se calentaba debido a la fricción. Si el bloque de masa m desciende una altura x (Δx), la energía potencial disminuye en $m \times g \times \Delta x$ (masa x aceleración de la gravedad x altura), de tal forma que mediante esta relación se pudo calcular la energía utilizada para calentar el agua (despreciando otras pérdidas).



Experimento de Joule. *Izquierda*. James Prescott Joule. *Derecha*. Esquema del experimento que demostró el equivalente mecánico del calor, conocido como el experimento de Joule, que llevó a demostrar que el calor y el trabajo son dos formas intercambiables de energía. La pesa de masa *m* se mueve hacia abajo dado que sobre ella actúa la fuerza de gravedad (*F*). Esto hace rotar las paletas en el recipiente, provocando aumento de energía cinética en las partículas, traduciéndose en un aumento de la temperatura que refleja la conversión del trabajo ($W = F \times \Delta x$) en calor (*Q*).

Joule encontró que la disminución de energía potencial era proporcional al incremento de temperatura del agua. La constante de proporcionalidad (el calor específico del agua) era igual a 4,186 J/(g ºC). Por lo tanto, 4,186 J de energía mecánica aumentan la temperatura de 1 g de agua en 1ºC. Así, se definió a la caloría, unidad de energía que se utiliza hasta el día de hoy, como 4,186 J sin referencia a la sustancia que se está calentando. De allí surge que

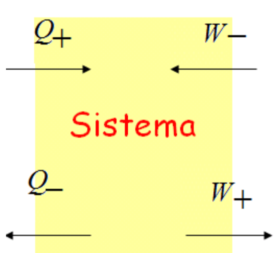
$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

Concepto de Energía Interna

En este momento, podemos introducir el concepto de **Energía Interna** (*U*), que es la sumatoria de todas las energías potenciales y cinéticas del sistema en estudio, y establecer, como surgiera del experimento de Joule, que existen dos formas, y sólo dos formas de intercambiar energía con un sistema, calor y trabajo (del que habrá un número variado de tipos). La Energía Interna es siempre desconocida, pero se pueden hacer observaciones y mediciones de los cambios de ésta (ΔU) a partir de los intercambios mencionados.

Convención de signos

Para el presente curso adoptaremos la siguiente convención de signos. Diremos que el trabajo (*W*) será positivo cuando es realizado por el sistema hacia el entorno y negativo en el sentido contrario y el calor (*Q*) será positivo cuando lo absorbe el sistema desde el entorno y negativo en el caso contrario.

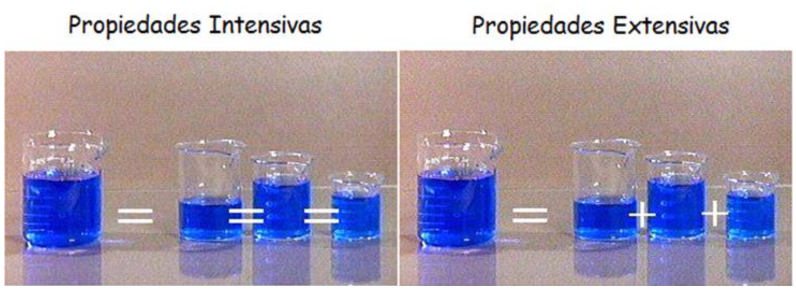


Convención de signos. Se denota *Q*+ al calor con signo positivo, *Q*- al calor con signo negativo, *W*- al trabajo con signo negativo y *W*+ al trabajo con signo positivo. El sentido de la flecha, indica hacia dónde ocurre el intercambio.

NOTA: Hay otras convenciones de signos. Se recomienda que el alumno adopte esta convención dado que las ecuaciones que siguen están escritas en base a la misma.

Propiedades de un sistema termodinámico

Las propiedades de estado de un sistema termodinámico homogéneo se pueden dividir en dos categorías, propiedades **intensivas** y **extensivas**. Las propiedades intensivas son aquellas que son características de la totalidad del sistema. Son idénticas en cualquier parte del sistema seleccionada arbitrariamente, y no son aditivas, por ejemplo, la presión (P), la temperatura (T), la concentración (c) y el potencial eléctrico (ψ). Por ejemplo, si tenemos un vaso de precipitados conteniendo una solución de sulfato de cobre ($CuSO_4$) como se muestra en la siguiente Fig., cada gota de solución de la porción superior de la misma tendrá la misma concentración que la solución total, la concentración es una propiedad **intensiva** del sistema.



Propiedades intensivas y extensivas. Las propiedades intensivas son iguales independientemente del tamaño del sistema, sin embargo, las propiedades extensivas, dependen del tamaño del sistema en estudio y son aditivas.

Las propiedades **extensivas** de un sistema homogéneo, por otro lado, se relacionan directamente con la medida o tamaño del sistema y son aditivas, por ejemplo, el volumen (V) y el número de moles (n). Si volvemos al ejemplo de la figura, el número de moles de la sal contenida en una gota no será el mismo número de moles que en la solución total. Es notable además que del cociente (división) de dos propiedades extensivas cualesquiera, surge como resultado una propiedad intensiva (por ejemplo, el cociente entre el número de moles n y el volumen V, resulta la concentración, $n / V = C$). Se puede demostrar que cualquier propiedad intensiva se puede expresar como una función de propiedades extensivas de un sistema (un ejemplo típico es la Ley de los gases ideales, $PV = nRT$, que puede ser escrita como $P = CRT$, ¿reconocen cuáles son propiedades intensivas y cuáles son extensivas en la ecuación?).

Tabla 1. Propiedades conjugadas de los sistemas

Propiedad Intensiva	Propiedad Extensiva
Presión (P)	Volumen (V)
Potencial Eléctrico (ψ)	Carga (e)
Temperatura (T)	Entropía (S)
Potencial Químico (μ)	Moles (n)

¿Qué quiere decir que estén conjugadas? Cada propiedad intensiva está vinculada a una propiedad extensiva (V, S, T,…), y la diferencia en una propiedad intensiva (e.g. ΔP, ΔS, ΔT, …) resulta en una fuerza que impulsa el flujo o desplazamiento de su propiedad extensiva conjugada. Las propiedades de estado conjugadas que serán de interés en este curso, se listan en la Tabla 1. Claramente, una diferencia en la presión (ΔP) es una fuerza impulsora para el desplazamiento del volumen (V), una diferencia de potencial eléctrico ($\Delta\psi$) es una fuerza impulsora para el flujo de carga (e) y una diferencia de la temperatura (ΔT) es una fuerza impulsora para la entropía (S).

Principios de la Termodinámica

Brevemente, mencionaremos los dos Principios fundamentales de la Termodinámica, que serán de interés en el presente curso.

El **Primer Principio** establece que la energía del universo se mantiene *constante*. O, como seguramente han escuchado alguna vez, *la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma*. La energía se transferirá hacia o desde el sistema al entorno ya sea en forma de calor o trabajo, provocando cambios de energía.

El **Segundo Principio** define una función termodinámica llamada *entropía* y establece que la entropía del universo tiende a aumentar, dado que los procesos espontáneos tienen lugar sólo en la dirección hacia el equilibrio. Entenderemos a la entropía principalmente como una medida del desorden del sistema. Por ejemplo, en igualdad de circunstancias, la entropía de una sustancia cristalina es menor que la de una sustancia líquida, porque los átomos están dispuestos de una manera altamente ordenada en el cristal, mientras que hay un desorden considerable en el líquido. También hay dos fuerzas que impulsan una reacción, uno de ellas en la dirección de la mínima energía posible y la otra en la dirección del mayor desorden posible. Cuál de estas dos fuerzas resulte más importante para que un proceso se lleve a cabo, dependerá de la temperatura.

Para comprender estos principios, es importante saber qué es la temperatura, usada erróneamente y con frecuencia como sinónimo de calor.

Nociones de equilibrio y su diferencia con el estado estacionario

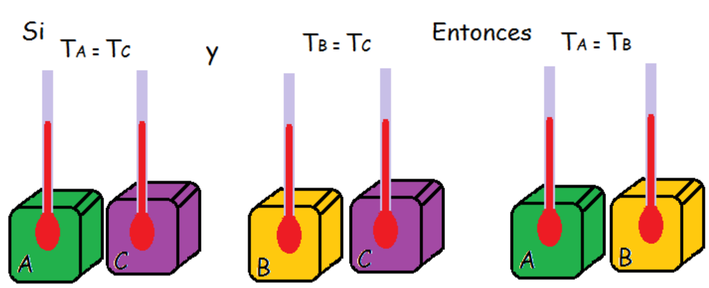
En física muchas veces se denomina equilibrio al estado en el cual se encuentra un cuerpo cuando las fuerzas que actúan sobre él se compensan y anulan recíprocamente. Sin embargo, la denominación de equilibrio en general es más extensa que eso. En general definiremos equilibrio (si bien los hay de distintos tipos) a aquel estado en cual no se observan cambios en el tiempo. Es decir, que las concentraciones y cantidades de las sustancias se mantienen constantes sin necesidad de invertir energía para lograrlo. Por ejemplo, imaginemos que tomamos un recipiente (un muy buen recipiente, uno de esos que se cierre tan bien que no permite que nada entre y nada salga) y le agregamos agua y sal. Supongamos que lo guardamos en nuestra casa y no le decimos a nadie. Unos siglos después, alguien encuentra el frasco y lo abre. Seguramente encontrará exactamente lo que dejamos, todo se mantuvo constante. Todo estuvo en equilibrio todo ese tiempo.

Se llama estado estacionario a aquella situación donde las concentraciones se mantienen iguales, pero esto ocurre a expensas de gasto energético. Por ejemplo, el mantenimiento aproximadamente constante de nuestro peso en el transcurso de un día es un ejemplo de estado estacionario, donde nuestra composición permanece aproximadamente constante a expensas de la energía que obtenemos de los alimentos.

Toda la termodinámica que veremos se basa en situaciones de equilibrio.

Temperatura e interacciones térmicas

La temperatura representa la energía cinética media de las partículas de un sistema. Dos cuerpos se dicen que están a *diferente* **temperatura** si cambian sus propiedades cuando están en contacto el uno con el otro. Por ejemplo, cuando un alambre de metal caliente se sumerge en agua fría, el alambre se acorta, y el agua cambia su densidad. Cuando no ocurren más cambios, se dice que hay igualdad de temperatura o **equilibrio térmico**.



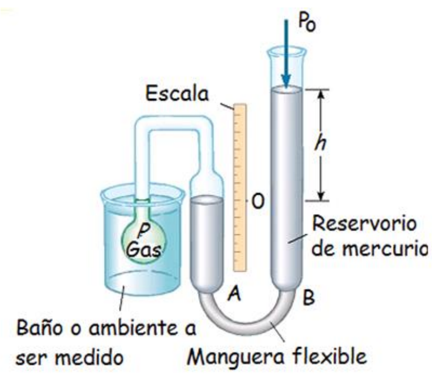
Equilibrio térmico. Si el cuerpo A está a la misma temperatura que el cuerpo C, y el cuerpo B está a la misma temperatura que C, entonces el cuerpo A está a la misma temperatura que el cuerpo B, es decir, existe equilibrio térmico entre A y B.

Cuando dos cuerpos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C, entonces los tres cuerpos estarán en equilibrio térmico entre sí. Para establecer que hay equilibrio térmico, tendremos que medir la temperatura de los cuerpos, y para ello es necesario definir una escala de temperatura. Una escala común que conocen es la escala de grados centígrados (°C). Esta escala se define a partir de dos transformaciones de fase del agua: el punto de ebullición a 1 atm de presión (al que se le asigna el valor de 100°C) y su punto de congelación cuando se satura con aire de 1 atm de presión (al que se le asigna el valor de 0°C en esta escala). Los termómetros que contienen mercurio (Hg), utilizan la dilatación de este metal líquido como indicador. El termómetro conteniendo Hg se coloca en contacto con agua en ebullición y agua en fusión, de tal forma de obtener la marca para 100°C y la 0°C. Luego se subdivide la distancia para los valores intermedios.

Existe otra escala que está ligada al comportamiento ideal de los *gases*, a presión suficientemente baja y es la escala Kelvin (K). Esta escala se conoce como escala de temperatura absoluta o Kelvin, y es directamente proporcional al volumen V de un gas ideal a presión constante,

$$T = \text{constante} \times V$$

El Kelvin se define a partir del punto triple del agua pura, en el que el hielo, el agua líquida y el vapor están en equilibrio, y es 273,16 K (aproximadamente 273 para los fines de este curso). Debe tenerse en cuenta que el punto triple del agua, es un punto fijo invariante. En otras palabras, la relación entre el K y el °C es:



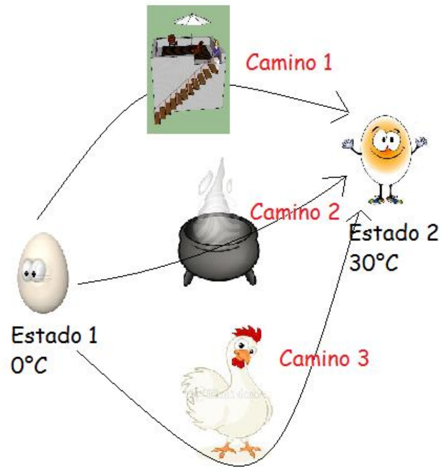
$$K = °C + 273\ K$$

Termómetro de gas ideal. El mismo consta de un bulbo conteniendo un pequeño volumen de gas ideal, cuyo cambio de volumen ser relacionará directamente con la temperatura medida.

La medición de la temperatura absoluta requiere el uso de un termómetro de gas ideal, como se esquematiza en la Fig. a la izquierda. El mismo se basa en la ley de Boyle-Mariotte ($V_1 \times P_1 = V_2 \times V_2$). Consta de un bulbo que contiene una pequeña cantidad de un gas de comportamiento ideal (puede ser N_2 por ejemplo). El bulbo se introduce en el medio que se desea medir y se permite que llegue a equilibrio térmico con el mismo. Dependiendo de la temperatura, el gas contenido en el bulbo modificará su volumen. Este cambio de volumen se contrarresta por la aplicación de una presión (P_o) de tal modo de mantener el volumen constante. A mayor temperatura, más se va a expandir el gas, y mayor será la presión a ser aplicada para contrarrestar el cambio. La altura de la columna h que variará con la presión aplicada, será lo que se compare con la escala del termómetro.

Estados y funciones de estado

Un concepto importante en Termodinámica son las **funciones de estado**, que dependen *solamente* del estado del sistema y no de su historia previa, es decir de cómo llegaron allí. De ahí su nombre. Por ejemplo, el volumen, la temperatura, la presión y la densidad son funciones de estado para un sistema homogéneo.



Funciones de estado. La temperatura es una función de estado. A un huevo lo podemos llevar de la temperatura del estado 1 a la temperatura de estado 2, de diferentes formas (al sol en la terraza, calentándolo por unos minutos, o poniéndolo debajo de una gallina). Independiente de ellas, la temperatura alcanzada, será la misma.

Veamos un ejemplo, no importa si para llevar a un huevo de gallina de 0°C a 30°C, lo dejamos al sol, lo subimos a la terraza, lo calentamos en una olla o lo ponemos debajo de la gallina, independiente del camino recorrido, el huevo pasó de 0°C a 30°C, en nuestro ejemplo. Por ello, la temperatura, es una función de estado.

El **Trabajo** y el **Calor no** son funciones de estado, pero su diferencia define una función de estado que veremos en las próximas secciones. Las funciones de estado no son necesariamente independientes una de la otra. Por ejemplo, en una cantidad especificada de gas, el volumen y la densidad son determinados por la presión y la temperatura. La relación entre la temperatura, la presión, y el volumen de una cantidad dada de sustancia se conoce como **ecuación de estado**, que depende, por supuesto, de la naturaleza de la sustancia.

Cuando se altera el estado de un sistema, el cambio de cualquier función de estado depende sólo de los valores iniciales y finales. En otras palabras, el incremento ΔX de una función de estado X se define por

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

donde ΔX es independiente de la trayectoria en la que se efectúa el cambio de estado (por ejemplo, $\Delta T = T_2 - T_1 = 30°C - 0°C = 30°C$, para el huevo!). A veces puede ser imposible definir el camino por el cual un cambio en el estado se lleva a cabo (¿qué tal si la gallina se fue y lo dejó al sol por un rato y nunca nos enteramos?), de todos modos, la ΔX será la misma. He aquí una de las bellezas de la Termodinámica!

Noten que si los estados 1 y 2 son iguales, entonces es un proceso cíclico, que lo lleva de un estado determinado a través de una secuencia de cambios de nuevo a su estado original (por ejemplo, el huevo podría haber sido calentado por la gallina, y luego cuando la gallina se fue a dormir en la noche de invierno, puede volver a los 0°C). Entonces, para cualquier ciclo y cualquier función de estado X,

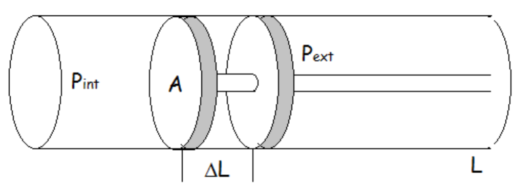
$$\Delta X = 0$$

Los caminos por los que una función de estado varíe pueden ser *reversibles* o *irreversibles*. Un proceso reversible es uno que puede ser seguido en cualquier dirección. En otras palabras, un camino reversible es aquel que ocurre siempre a través de infinitas situaciones de equilibrio. Por ejemplo, imaginen una jeringa común cerrada en el extremo, que contiene un gas en el interior (aire por ejemplo). Si apretamos el émbolo, el volumen se va a reducir. Pero para que eso ocurra a través de un proceso reversible, la presión ejercida tendría que ser tan pequeña que estemos constantemente igualando la presión en el interior de la jeringa. Claramente, si hiciéramos esto, en realidad, moriríamos sin que el émbolo bajara y el gas se comprimiera. Por este motivo un proceso reversible es sólo ideal y en la vida cotidiana, constantemente estamos expuestos a procesos irreversibles.

Todos los procesos naturales son irreversibles, pero así como en Hidrodinámica aproximamos los fluidos a través de modelos ideales, aquí trataremos los procesos como reversibles para obtener aproximaciones con la Termodinámica clásica.

Trabajo

Un sistema puede realizar trabajo mecánico, eléctrico, químico, u otro. El trabajo *W* según nuestra convención se considera positivo cuando lo realiza el sistema hacia el entorno y negativo en el sentido contrario. El trabajo no es una función de estado. Comenzaremos hablando de un tipo de trabajo relacionado con los gases que es el **trabajo de expansión**. Este trabajo ocurre cuando el sistema se expande contra una presión exterior (P_{ext}). Como un caso especial, considere que el sistema sea una sustancia contenida en un cilindro de sección transversal A empujado con un pistón móvil. Observe la figura.



Trabajo de expansión. Cuando el gas se expande y mueve el pistón de área *A* por una distancia ΔL, se realiza el trabajo $\Delta L \times F$, donde $F = A \times P_{ext}$ (recordar que $P = F/A$, siendo F = fuerza)

Cuando empujamos el pistón, éste se va a mover una distancia que llamaremos *d* contra una presión externa P_{ext}. El trabajo *W* será entonces, en ecuaciones,

$$W = \vec{F} \times d$$

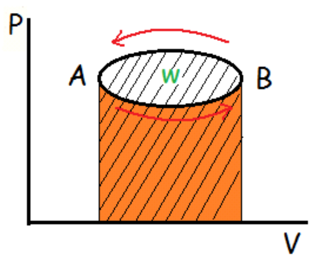
ahora dado que $\quad |\vec{F}| = P_{ext} \times A \quad$ entonces, reemplazando

$$W = P_{ext} \times A \times d = P_{ext} \times \Delta V$$

El subíndice “ext” normalmente no se escribe, y entonces:

$$W = P \times \Delta V$$

Dada esta definición de *W*, si graficamos *P* en función del volumen *V* en un proceso cíclico, entonces, el área encerrada por la curva, representa el trabajo *W*. Para un proceso que va de A hacia B por el camino superior de la figura siguiente, el trabajo se puede calcular como la integral (o sea el área rayada para hacerlo más simple). Para el proceso en el sentido inverso, de B hacia A, el trabajo, será aquel marcado en naranja. Para el proceso cíclico, el trabajo será la diferencia entre ambas áreas, es decir, lo que queda encerrado en la elipse. Cuando un sistema se contrae, ΔV es negativo, y por lo tanto *W* es negativo, porque el entorno realiza trabajo sobre el sistema. Nótese que dependiendo de la trayectoria, el área encerrada será diferente, y por ende, el trabajo involucrado para ir de A hacia B (o viceversa) será distinto. Por este motivo, el trabajo, no es una función de estado.



Trabajo de expansión de un proceso cíclico. Cuando se efectúa el recorrido de A hacia B en el sentido de la flecha, el trabajo (P x ΔV) es igual al área encerrada (rayada). Si la dirección del movimiento es la opuesta (de B hacia A, por el camino indicado con la flecha superior), el trabajo se obtendrá como el área coloreada en naranja.

Una forma de ver que el trabajo depende del camino tomado para llegar a un estado, es volver a pensar en el ejemplo del huevo. No es lo mismo que se lo demos a la gallina para que lo incube, a que subamos 25 escalones hasta la terraza, o tomarnos el trabajo de colocar el agua en la olla y cuidadosamente esperar a que llegue hasta los 30°C.

Calor

El calor representa una transferencia de energía análoga a la transferencia de trabajo. Un cuerpo caliente no “contiene calor”, pero puede transferir calor a un cuerpo más frío. Por convención, el calor que absorbe un sistema del entorno se considera positivo y el calor que fluye desde el sistema al entorno, negativo. El calor siempre fluye desde un cuerpo de mayor temperatura a un cuerpo de menor temperatura. La transferencia de calor a temperatura constante se observa durante los cambios de estado.

La cantidad de calor *Q* que es necesaria para cambiar el estado de un sistema depende del camino, y **no** es una función de estado. Por ejemplo, 1 litro de H_2O (l) se puede calentar de 20 a 30°C mediante el suministro de calor, accionando un agitador, haciendo ambas cosas, o aún por otros medios.

Calor sensible y aumento de temperatura

Si una sustancia recibe calor y manifiesta un cambio de temperatura, ese calor se conoce como calor sensible (Q_s). Además, no todos los cuerpos van a sufrir el mismo cambio de temperatura aunque les entreguemos una misma cantidad de calor (por ejemplo colocando a todos el mismo tiempo sobre una hornalla a idéntica intensidad de llama). Existe una característica intrínseca de los cuerpos que hace más fácil o difícil aumentar su temperatura. Si colocamos 1 litro (1 kg) de agua o 1 kilo de hierro durante 1 minuto sobre la hornalla ambos al mismo tiempo, el kilo de hierro adquirirá una mayor temperatura. Todo esto se puede resumir en una sencilla expresión que describe los cambios de temperatura de los cuerpos al recibir o ceder calor.

$$Q_S = c \times m \times (T_f - T_0)$$

donde c es una propiedad intrínseca de los materiales, llamada **calor específico**, que describe cuán fácil o difícil resulta variarle su temperatura. Dicha propiedad se mide en unidades de energía por kg y grado de temperatura. Algunos ejemplos son:

Calores específicos		
	kJ/(kg K)	cal/(g °C)
Agua líquida	4,169	0,995 (~1,0)
Hielo	2,089	0,500
Vapor de agua	1,963	0,470
Acero	0,447	0,106
Cobre	0,385	0,092
Aluminio	0,898	0,214
Hierro	0,443	0,106
Plomo	0,130	0,030
Grasa	0,690	0,165
Madera	2,510	0,600

La propiedad intrínseca que se le atribuye al cuerpo va a influir sobre la masa total de la sustancia en estudio. En ese caso se le da el nombre de **capacidad calorífica**, y se simboliza con la C mayúscula donde tendremos que la **capacidad calorífica** va a representar el **calor específico** multiplicado por la **masa** de dicha sustancia:

$$C = c \times m$$

La expresión de variación de temperatura quedará expresada de este modo:

$$Q_S = C \times (T_f - T_0)$$

Calor latente y cambio de estado

Los cambios de estado de agregación de la materia (sólido a líquido, etc.), también son consecuencia de la pérdida o ganancia de calor. Durante un cambio de estado la temperatura se mantiene constante. Este tipo de intercambio de calor donde no se observa una elevación de la temperatura se conoce como calor latente (Q_L). Por ejemplo, mientras el hielo se derrite, la temperatura se mantiene estable a 0°C y mientras el agua se evapora se mantiene a 100°C (considerando en ambos casos una presión externa de 1 atm). Para derretir más hielo, se necesita más calor. Esas magnitudes son directamente proporcionales. Pero con la misma cantidad de calor con la que se derrite 1 kg de hielo, se pueden derretir 15 kg de plomo.

Resumiendo: el cambio de estado depende de la cantidad de materia que cambia, y también de una propiedad intrínseca de la materia llamada calor latente que se simboliza como L, siendo L_F, el calor latente de fusión y L_V, el calor latente de vaporización. El calor de cambio de estado será:

$$Q_L = L \times m$$

Si se calcula el calor asociado a la fusión, utilizaremos el calor latente de fusión (L_F) y si es el asociado a la ebullición, será el calor latente de vaporización (L_V). La siguiente tabla muestra algunos calores latentes y la temperatura a la que ocurren los procesos de cambio de estado.

Calores latentes de fusión y evaporación				
Sustancias	$T_{fusión}$ (°C)	L_F (cal/g)	$T_{ebullición}$ (°C)	L_V (cal/g)
Agua	0	80	100	540
Plomo	327	5,5	1.750	208
Cobre	1093	49	2.600	1147
Nota: las unidades cal/g y kcal/kg son indistintas. En cambio kcal/kg = 4,187 kJ/kg				

Al realizar cálculos que incluyan a la temperatura, se debe prestar atención a las unidades en que están expresadas las constantes (K o °C) y utilizar la constante que corresponda.

Si la masa de una sustancia pasa por un cambio de estado y además recibe calor suficiente para elevar su temperatura (supongamos que una masa de hielo recibe suficiente calor para derretirse completamente y elevar además su temperatura hasta 10°C), entonces, el Q total será el resultado de la suma de ambos componentes:

$$Q = Q_S + Q_L = C \times (T_f - T_0) + L \times m$$

Transmisión de calor

El calor es una forma de energía que fluye de un cuerpo a otro espontáneamente desde el cuerpo a mayor temperatura al de menor temperatura. Se llama transmisión del calor a los procesos por los que el calor pasa de un cuerpo a otro. Básicamente se distinguen tres procesos: **convección, conducción**, y **radiación**.

Convección

Los fluidos transportan energía de forma de calor, dada su facilidad para moverse de un lado a otro. Por ejemplo, el aire caliente es menos denso que el aire frío, de modo que si tenemos una masa de aire caliente dentro de una masa de aire frío mucho más grande y que envuelve a la caliente, ésta se elevará.

La transferencia de calor por convección se expresa con la Ley del enfriamiento de Newton:

$$\frac{dQ}{dt} = -h \times A \times (T_{cuerpo}(t) - T_{ambiente})$$

Los cúmulonimbus son formaciones nubosas típicas de los días tormentosos de verano. Las nubes ingresan en una corriente ascendente de aire cálido que tomó calor de la superficie de la tierra. Al encontrar estratos atmosféricos de baja presión se expanden adoptando la forma característica de hongo. Las corrientes ascendentes toman calor en los niveles inferiores y lo transportan a los niveles superiores.

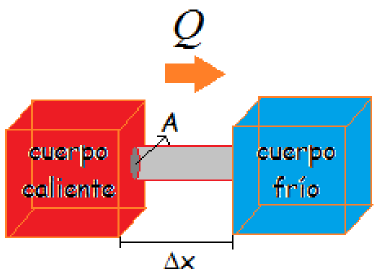
Conducción. Ley de Fourier.

La conducción del calor es la forma de transmisión en que el calor viaja por el interior de un medio material. Pensemos en dos cuerpos que aunque reciben o ceden calor, no varían su temperatura. El motivo por el cual no varían su temperatura podría deberse a que son cuerpos enormes (como el aire del medio ambiente, o el mar, o un río), o puede deberse a que reciben un aporte energético por otro lado (como una caldera), o porque tienen una fuente calórica propia (como los mamíferos).

El “movimiento” del calor de un lado a otro se puede cuantificar planteando el cociente:

$$movimiento = \frac{Q}{\Delta t}$$

magnitud que no tiene nombre propio pero que se trata de una potencia, y sus unidades más usuales serán el watt (W), las calorías por segundo (cal/seg), calorías por hora (cal/h), etc.



Concentrémonos en la barra que conecta los dos cuerpos. El calor "viaja" por adentro desde el cuerpo caliente hasta el cuerpo frío. El calor viajará más rápido cuanto mayor sea el área (A) de la barra. Viajará más lento cuanto más larga sea la barra (Δx) y viajará más rápido cuanto mayor sea la diferencia de temperatura entre las fuentes (ΔT).

También ocurrirá que, dependiendo del material de la barra, el calor viajará más rápido o más lento dado que hay buenos y malos conductores del calor. Esa propiedad intrínseca de los materiales que describe su conductividad calórica se llama **conductividad térmica** y se simboliza con la letra ***k*** minúscula (varios textos utilizan λ).

Todo lo que analizamos hasta ahora se puede resumir en esta ley experimental llamada **Ley de Fourier**:

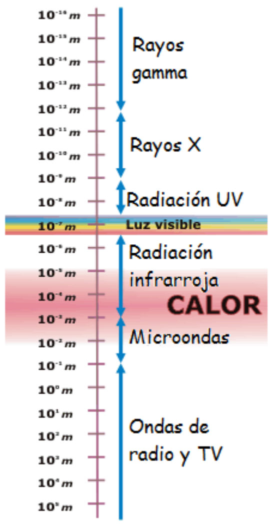
$$\frac{Q}{\Delta t} = -k \times A \times \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

El signo menos obedece a que al restar las temperaturas siempre obtendremos un número negativo, ya que el calor siempre viaja desde la mayor temperatura (inicial) hasta la menor temperatura (final).

Notas de interés biológico. Ser homeotermo (mantener la temperatura del cuerpo constante), tener la sangre caliente, y vivir en ambientes de temperatura variable, no es fácil si no se tiene un buen aislante térmico. Un gran invento es el pelo de los mamíferos. Para "vestirse" rodeados de aire hay que atraparlo y dejarlo pegado a la piel. Ese es el trabajo que realiza el pelo. En su defecto, reemplazamos el aire atrapado por nuestro propio pelo, por el aire atrapado en la ropa que vestimos.

Para evitar la pérdida de calor, una de las estrategias más importantes que ponemos en marcha es la de enfriar la piel, así se minimiza la diferencia de temperatura entre la piel y el ambiente y cesa la pérdida de calor. Esto se logra cortando la circulación sanguínea de la piel y también haciendo retornar la sangre de las extremidades por las venas centrales que van pegadas a las arterias (venas concomitantes) que recogen todo el calor que libera la sangre arterial. Para aumentar la pérdida de calor, en cambio, una de las estrategias más importantes que comanda nuestro sistema nervioso es la deposición de agua sobre nuestra piel, que está poblada de pequeñas glándulas sudoríparas que sirven para mojarla. El agua ahí depositada se evapora, y el vapor se lleva consigo el exceso calor que queremos sacarnos de encima. Con cada gramo de sudor evaporado se elimina 570 calorías.

Radiación. Ley de Stefan-Boltzmann



El calor puede viajar en forma de radiación. La radiación que transporta el calor no necesita de materia para desplazarse dado que lo hace como **radiación electromagnética**. El gráfico de la izquierda representa el espectro continuo de la radiación electromagnética desde los rayos más energéticos y penetrantes (arriba) hasta los más blandos e inofensivos (abajo). La columna de la izquierda representa la longitud de la onda.

La máxima energía se corresponde con la longitud de onda más pequeña, en ese extremo se encuentran los rayos Gamma, seguidos de los rayos X. Son tan penetrantes que atraviesan nuestros cuerpos y sirven para hacer radiografías. Se los llama radiaciones ionizantes y no son inocuas, no hay que exponerse a los rayos X sin necesidad.

La luz ultravioleta también es penetrante. No atraviesa todo nuestro cuerpo pero es capaz de producir lesiones en nuestra piel. Continúa un estrecho rango de longitudes, la luz visible, que va desde el violeta hasta el rojo. Con menor energía siguen las ondas infrarrojas y comienza la porción "térmica" o infrarrojo lejano que es la longitud de onda a la cual se transmite el calor. Sigue el rango de las microondas y más allá tenemos las ondas de TV, FM y radio AM.

Todo lo que existe en la naturaleza irradia energía, en todas las direcciones: irradian energía las personas, las nubes, los gases atmosféricos, los vegetales, los objetos metálicos, todo. La intensidad de la energía que un objeto irradia depende básicamente de su temperatura (absoluta). En especial, la radiación de energía en forma de calor está descripta por la **Ley de Stefan-Boltzmann**

$$\frac{Q}{\Delta t} = \sigma \times \varepsilon \times A \times T^4$$

donde T es la temperatura absoluta del cuerpo radiante, sigma es la constante de Boltzmann, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4, épsilon, ε, es el factor de emisividad del cuerpo, que es un número (sin unidades) con valores entre 0 y 1, y representa la propiedad superficial del cuerpo, haciéndolo más opaco o más reflectante a la radiación. La emisividad de un espejo vale 0 y la del cuerpo negro vale 1. La emisividad de las pieles humanas valen todas más o menos lo mismo, con un valor muy cercano a 1, A es el área del cuerpo expuesta a irradiar o recibir radiación. La radiación depende fuertemente de la temperatura del cuerpo, ya que está elevada a la cuarta potencia de la temperatura absoluta. Las unidades de este cociente, son unidades de potencia.

$$\frac{Q}{\Delta t} = W \text{ (watt)}$$

o cualquier otro cociente entre unidades de energía y tiempo, por ejemplo, calorías por minuto.

En general, los cuerpos irradian y absorben energía radiante simultáneamente. El balance neto, o **potencia neta**, puede obtenerse en forma aproximada de esta manera:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \sigma \times \varepsilon \times A \times \left(T_a^4 - T_e^4\right)$$

donde T_a es la temperatura absoluta del ambiente en que se halla el cuerpo (temperatura de absorción) y T_e es la temperatura absoluta de la superficie del cuerpo (temperatura de emisión).

Primer Principio de la Termodinámica

El **Primer Principio de la Termodinámica** establece que la energía del universo se mantiene constante. En otras palabras, toda la energía que recibe un sistema es porque la recibe de su entorno y viceversa, _que es lo mismo que decir que cuando se cambia el estado de un sistema, puede estar involucrada la transferencia de calor Q y/o de trabajo W_. Esas transferencias de energía se traducen en el cambio de la energía propia del sistema, que se conoce como su energía interna (U) que es, *ni* más ni menos que la energía contenida en su estructura, en los enlaces de las moléculas que lo conforman, en sus vibraciones, en sus movimientos

$$U = \sum \text{Energía Cinética+Energía Potencial}$$

Como se discutió previamente, tanto Q como W dependen de la trayectoria del proceso. Sin embargo, la diferencia del calor y el trabajo definen una función de estado, que es, como hemos mencionado la diferencia de energía interna del sistema (ΔU). En ecuaciones,

$$\Delta U = Q - W$$

Dado que el trabajo puede ser de varios tipos, que contribuyen al estado del sistema, el término W se puede desglosar en diferentes tipos:

$$\Delta U = Q - \left(P \times \Delta V + \psi \times \Delta e + \sum \mu_i \times \Delta n_i\right)$$

Donde el trabajo W en este ejemplo se compone de tres términos, siendo $P\Delta V$ la contribución al trabajo de expansión-contracción, ψ es el potencial eléctrico, e la carga ($\psi\Delta e$ define el trabajo eléctrico), μ_i es el potencial químico del soluto "i", y n_i el número de moles del mismo ($\mu_i\Delta n_i$ define el trabajo químico).

Dado que como hemos dicho el primer principio establece que la energía del universo se debe mantener constante, no nos sorprenderá concluir que:

$$\Delta U_{sistema} = \Delta U_{entorno}$$

Es decir, que nada se pierde. Lo que sale del sistema pasa al entorno y viceversa.

Entalpía

Comúnmente es mucho más sencillo medir los cambios a presión constante, dado que de por sí estamos siempre sometidos a la misma presión. Si la presión se mantiene constante podremos decir que:

$$\Delta U = Q_P - W, \quad ó \quad \Delta U = Q_P - P \times \Delta V$$

Resultando que

$$Q_P = \Delta U + P \times \Delta V$$

Al calor intercambiado a presión constante Q_P lo definiremos como una nueva función termodinámica llamada **Entalpía (*H*)**, cuya variación es ΔH.

En cuanto a su valor absoluto, la entalpía (*H*) se puede definir como:

$$H = U + P \times V$$

Pero, como con la energía interna, la Termodinámica sólo puede medir las variaciones de entalpía, que se describen considerando la presión constante como:

$$\Delta H = \Delta U + P \times \Delta V$$

Los procesos a presión constante que absorben calor son **endotérmicos** y el valor de ΔH es positivo, y si liberan calor son **exotérmicos** y su ΔH es negativo. En la Tabla siguiente, colocamos como ejemplo la entalpía asociada a algunos procesos.

Cambios de entalpía de algunos cambios de fase y reacciones químicas

Cambio de fase o reacción	ΔH, kcal	T, °C
$H_2O(s) = H_2O(l)$	1,44	0
$H_2O(l) = H_2O(g)$	9,71	100
$Br_2(l) = Br_2(g)$	7,68	59
$CO + ½ O_2(g) = CO_2(g)$	-67,63	25

NOTA: Fíjense en la Tabla que las reacciones tienen sus componentes acompañados de una sigla en paréntesis que indica el estado físico del compuesto en la reacción. Por ejemplo, en la primera, el agua sólida (s), o sea hielo, pasa a agua líquida (l) con absorción de calor (ΔH positivo).

El Segundo Principio de la Termodinámica

El **Segundo Principio de la Termodinámica** puede enunciarse de la siguiente forma: Los procesos naturales o espontáneos tienen lugar en la dirección hacia el equilibrio, y se detienen sólo cuando lo alcanzan, o en otras palabras, **la Entropía del universo tiende a aumentar**.

Introduciremos aquí una nueva función de estado: la **Entropía**. La entropía es una función de estado que da idea del desorden de un sistema. Originalmente se la definió mediante la introducción del concepto de procesos reversibles (ideales), es decir, de procesos que tienen lugar en forma infinitamente lenta a través de infinitos estados de equilibrio (procesos ideales). La variación de entropía (ΔS), para un proceso reversible se la define por la relación:

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T}$$

Donde S es la entropía, Q_{rev} es el calor asociado al proceso reversible. Dado que S es una función de estado, un cambio de S (ΔS) sólo depende de los estados iniciales y finales del sistema, siendo su valor independiente de la trayectoria recorrida. Sin embargo, para una transición dada la cantidad de calor intercambiado entre el sistema y el entorno es inferior cuando el proceso es reversible que cuando es irreversible. Por ello, para un proceso irreversible

$$\Delta S > \frac{Q_{rev}}{T}$$

Se dice por esto que en los procesos reales o espontáneos existe un calor "no compensado" que no se ve reflejado en el intercambio, pero que ocurre en el sistema, por lo que ΔS será mayor que Q_{rev}/T. Es importante destacar en este planteo que la Termodinámica no se ocupa del tiempo que lleve un proceso dado, o de su velocidad. Por ejemplo, aunque la palabra espontáneo sugiere comúnmente un elemento de tiempo, en Termodinámica, un proceso se considera espontáneo cuando obedece a la ecuación anterior, y por lo tanto va a ocurrir, a pesar de que su velocidad pudiera ser cero y en conclusión puede tardar un tiempo infinito, tanto que no lo veamos nunca en toda nuestra vida.

En síntesis, para los procesos **reversibles** (ideales) diremos que,

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T} \quad \Rightarrow \quad Q_{rev} = T \times \Delta S$$

mientras que para los procesos reales (irreversibles):

$$\Delta S > \frac{Q_{rev}}{T} \quad \Rightarrow \quad Q_{rev} < T\Delta S$$

Los procesos para los cuales $\Delta S < Q_{rev}/T$ están prohibidos, o sea, no son espontáneos y se los denomina procesos **no naturales** (habría que entregar energía externa para que ocurran).

Además de entender a la entropía desde una visión matemática, de la relación entre el calor y la temperatura, podemos apelar a la visión de "orden" del sistema que en realidad está íntimamente asociado al calor intercambiado (y así explicar el "calor no compensado"). Desde un punto de vista del estado de ordenamiento del sistema, los procesos espontáneos ocurren siempre que el desorden del universo aumente (Clausius: "la entropía del universo siempre aumenta"). Por ejemplo, si colocamos un terrón de azúcar en una taza de té, las moléculas de sacarosa estarán altamente ordenadas en el terrón. En la medida que la sacarosa difunde y se disuelve, se distribuirá en el volumen de la taza, hasta llegar a un punto de equilibrio, donde esté homogéneamente distribuida. Por lo tanto, cuando el sistema alcance el equilibrio habrá llegado a su estado de máximo desorden. En este punto, la entropía habrá llegado a su máximo valor posible.

La Entropía y el Segundo Principio

La formulación del Segundo Principio de la Termodinámica que define a la entropía dice que en cualquier transformación, la entropía del universo aumenta:

$$\Delta S_{universo} > 0$$

Veamos un ejemplo sencillo.

En un vaso se introducen un volumen la mitad de agua caliente (*ac*) y la mitad de agua fría (*af*). El calor que el agua caliente le cede al agua fría, es igual al calor que el agua fría recibe del agua caliente. Después de mezclarse suficientemente ambas partes terminan a una misma temperatura diferente de las dos iniciales.

El agua fría aumentó su entropía y el agua caliente la disminuyó. Sin embargo, en valor absoluto, el aumento de la entropía del agua fría es mayor que la disminución de la caliente... por lo que la entropía total del sistema habrá aumentado.

¿De dónde salió esa "entropía adicional"? La respuesta es que ha sido creada durante el proceso de mezcla. Y ya no puede volverse atrás: esa cantidad de entropía recién creada ya no puede ser destruida, el universo deberá cargar con ese aumento por toda la eternidad.

En símbolos:

$$\Delta S_{ac} + \Delta S_{af} > 0 \quad (\text{con } \Delta S_{ac} < 0 \text{ y } \Delta S_{af} > 0)$$

El signo de la variación de entropía (o sea, su aumento o disminución) lo da el numerador de la definición de ΔS, ya que el denominador (la temperatura absoluta) es siempre positiva. Por lo tanto si un cuerpo cede calor, disminuirá su entropía ($\Delta S < 0$) y si un cuerpo recibe calor, aumentará su entropía ($\Delta S > 0$).

Eficiencia o rendimiento

El concepto de **eficiencia**, *e*, en Termodinámica es lo mismo que **rendimiento** (conceptualmente hablando) similar al del lenguaje coloquial. Una máquina (como un negocio) es más eficiente cuanto mayor sea el beneficio y cuanto menor sea el costo o la inversión. En el caso de la máquina frigorífica el beneficio es claramente calor extraído de la fuente fría (el gabinete de la heladera, la habitación con aire acondicionado, lo que sea) y la inversión es el trabajo del motor eléctrico que enchufamos a la corriente domiciliaria para recibir energía (eléctrica).

$$e = \frac{Q_1}{W}$$

Siendo *e*, la eficiencia del sistema. La eficiencia no tiene unidades (adimensional).

Energía Libre de Gibbs

Repasando, hemos visto el Primer y el Segundo Principios de la Termodinámica, que pueden resumirse de la siguiente manera:

Primer Principio*:* La energía del universo es constante, y por lo tanto, no se crea ni se destruye, sólo sufre transformaciones. Lo que en ecuaciones se traduce en que, para un sistema termodinámico, todo cambio en su energía interna, va a ser medible por dos tipos de transferencia de energía, calor y trabajo, o sea:

$$\Delta U = Q - W$$

Segundo Principio*:* Los procesos naturales tienden a proceder hasta alcanzar un estado de equilibrio o de máximo desorden, lo que es análogo a decir que la entropía del universo tiende a un máximo, de tal modo que

$$\Delta S_{universo} \geq 0$$

A pesar de que la Termodinámica clásica ha sido principalmente desarrollada con el Primer y el Segundo principios, la ecuación que define a los cambios de la energía interna no da ninguna idea de si un proceso ocurre espontáneamente o no. Si bien el Segundo Principio, a través de la entropía, sí provee de una herramienta (dirección del desorden hacia el equilibrio), es cierto que medir las variaciones de entropía del entorno, no es una tarea sencilla. Es por esto que Josiah Willard Gibbs introdujo una nueva función, que es de suma utilidad para evaluar la espontaneidad de los procesos, o en otras palabras, evaluar si los procesos pueden ocurrir o no, sin aporte de energía externa. Para comprender con un desarrollo sencillo cuál es la importancia fundamental de esta función, partiremos del concepto de energía interna:

$$\Delta U = Q - W\,.$$

Cuando hemos hablado de trabajo (*W*), hasta el momento, nos hemos referido principalmente al trabajo de expansión-contracción ($P\Delta V$). Sin embargo, no era éste el trabajo que ocupaba la mente de Gibbs, quien estaba interesado en aquel trabajo "útil", que fuera distinto del trabajo de expansión. Para ver de qué trabajo estamos hablando, reemplazaremos *Q* por $T\Delta S$ (del Segundo Principio) y al trabajo *W*, lo desglosaremos en tres de los tipos de trabajo principales. Los tipos de trabajo que estudiaremos en esta clase serán: el trabajo de expansión-contracción que ya hemos visto ($P\Delta V$, presión-volumen), el trabajo eléctrico ($\psi\Delta q_e$, potencial eléctrico ψ (letra griega psi)-carga eléctrica q_e) y el trabajo químico ($\mu_i\Delta n_i$, potencial químico de la especie i (μ_i, letra griega "mu")- masa en moles de dicha especie). Así, se obtiene:

$$\Delta U = T \times \Delta S - P \times \Delta V + \psi \times \Delta q_e + \sum_i \mu_i \times \Delta n_i$$

NOTA: el término $\Sigma\mu_i\Delta n_i$ se lee como sumatoria (de cada especie i) del producto entre el potencial químico (μ_i) de la especie i multiplicado por la variación en el número de moles de esa especie. Por ejemplo, si habláramos del potencial químico aportado por la variación en el número de moles del NaCl (cloruro de sodio, sal de mesa), la sumatoria se reduciría a $\mu_{Na}\Delta n_{Na} + \mu_{Cl}\Delta n_{Cl}$ que equivale a la suma del potencial químico del Na^+ multiplicada por la variación en el número de moles del Na^+ más el potencial químico del Cl^- multiplicado por la variación en el número de moles del Cl^-.

Entendido el significado de la ecuación anterior, todo el trabajo distinto del de expansión-contracción, lo llamaremos trabajo útil, o energía libre de Gibbs (G)*, de tal modo que reemplazaremos esos términos por ΔG y obtendremos la siguiente igualdad:

$$\Delta U = T \times \Delta S - P \times \Delta V + \Delta G$$

Ahora, despejemos ΔG:

$$\Delta G = \Delta U + P \times \Delta V - T \times \Delta S$$

Si recordamos que la suma de la energía interna más el trabajo de expansión, se conoce como entalpía $\Delta H = \Delta U + P\Delta V$, podemos reescribir la última ecuación como:

$$(\Delta G)_{P,T} = \Delta H - T \times \Delta S$$

NOTA: $(\Delta G)_{P,T}$ simplemente significa variación (Δ) de la energía libre de Gibbs (G) a P y T constantes. La energía libre de Gibbs tiene un papel fundamental en el conocimiento de las reacciones químicas y de todas las transformaciones de interés en la Biología (y por en de los seres humanos). La van a aplicar en disciplinas como la Bioquímica, Fisiología, Farmacología, etc. También es útil comentar que existe otra energía libre, de Helmholtz, definida a temperatura y volumen constantes, de la que no nos ocuparemos en este curso.

Resumiendo, la espontaneidad de un proceso está determinada por **la Energía Libre de Gibbs**, o sea la sumatoria de dos funciones termodinámicas: los cambios de **la Entalpía** y **la Entropía** del sistema (¡no del entorno!). Esto quiere decir, el calor y el desorden asociados al sistema en estudio. La temperatura, contribuirá en muchas situaciones de una forma no despreciable, al término entrópico.

Condiciones de equilibrio y procesos espontáneos

Existen muchos procesos químicos que ocurren a lo largo de caminos donde todo el trabajo ocurrido es del tipo expansión-contracción. En estos casos el trabajo útil o energía libre de Gibbs será igual a 0 ($\Delta G = 0$), es decir que no hay trabajo útil. Casos en los que el trabajo útil es distinto de cero, incluyen, por ejemplo, el trabajo eléctrico, magnético, químico, entre otros. Distinguiremos tres casos para el valor del trabajo útil ΔG, que veremos a continuación:

(1) Un proceso o una reacción está en equilibrio cuando se cumple que:

$$\Delta G = 0$$

Esto significa que cuando un proceso está en equilibrio no hay trabajo útil que se pueda realizar. Esto es característico de un sistema en equilibrio termodinámico, que veremos en las siguientes secciones en mayor detalle.

(2) Un proceso será espontáneo en la dirección en que se escriba siempre que

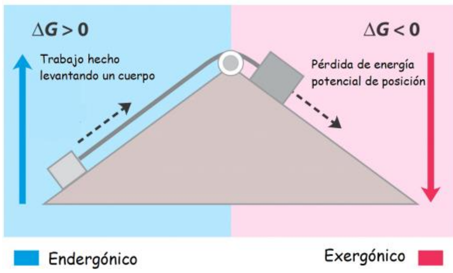
$$\Delta G < 0$$

En estos casos, el proceso libera energía al entorno, y se dice que es **exergónico** (¡ojo! *no confundir con exotérmico que sólo habla del calor de la reacción y no de su espontaneidad*).

(3) Por el contrario un proceso será NO espontáneo cuando

$$\Delta G > 0$$

Ejemplo mecánico



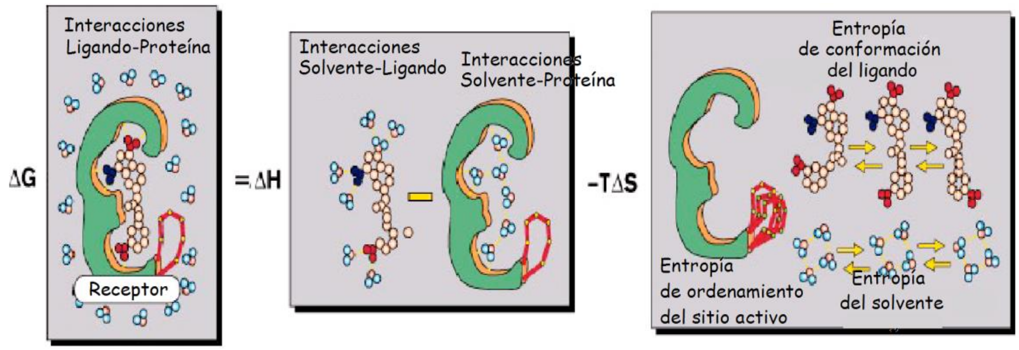
Espontaneidad de un proceso. En la figura se puede ver un bloque ascendiendo por una pendiente (gana energía potencial). El proceso de ascenso, requerirá que se le suministre energía, y por lo tanto, su ΔG será positivo y será un proceso no espontáneo (endergónico). Sin embargo, la caída del bloque por la pendiente, será un proceso espontáneo impulsado por la fuerza de gravedad, y por ende el ΔG asociado será negativo (entrega energía al entorno), siendo un proceso exergónico.

En estos casos, el proceso no ocurriría espontáneamente y absorbería energía del entorno para ocurrir, por lo que se dice que este proceso es **endergónico** (¡ojo! *no confundir con endotérmico que sólo habla del calor de reacción y no se su espontaneidad*).

Veamos esto con un ejemplo. Si tenemos que subir un bloque por una colina, este proceso requerirá el aporte de energía, dado que todos sabemos que no sube por sí solo. Por lo tanto, el proceso de subida será no espontáneo, en otras palabras, será un proceso **endergónico** ($\Delta G > 0$), al que le tenemos que suministrar energía provista por el entorno (en este caso, la energía podría ser provista por una persona que moviera la roldana de la polea en la cima de la colina). Cuando llegue a la cima, si soltamos el cuerpo, el mismo descenderá espontáneamente impulsado por la fuerza de gravedad. Este es un proceso **exergónico**, cuyo ΔG será menor que cero. En cualquiera de los puntos de equilibrio el $\Delta G = 0$.

Fuerzas impulsoras de reacciones

Una pelota se cae de una colina por gravedad y el equilibrio existe sólo cuando la energía potencial llega a un mínimo en el punto más bajo de la colina. Por analogía, se podría esperar que la dirección en la que se encuentre un equilibrio termodinámico sea aquella en la cual exista la menor energía. A nivel biológico podemos estar interesados en si un proceso determinado, como por ejemplo la unión de un ligando a una enzima que se muestra en la Fig. a continuación, es espontánea o no. De la definición de ΔG, se puede ver que los procesos tienden a proceder hacia el estado de menor energía libre (y máxima entropía).



Espontaneidad del proceso en interacciones enzima-ligando. Para que la interacción entre una enzima y su ligando sea espontánea, el ΔG asociado deberá ser menor que cero. Esto se relaciona con una contribución entálpica (que podrá ser positiva o negativa) y una contribución entrópica que podrá ser mayor o menor a cero.

Hemos dicho que $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ y entonces la dirección de los procesos reales lo convierte en

$$(\Delta G)_{P,T} = \Delta H - T \times \Delta S < 0$$

Veamos la ecuación: si bien es deseable una disminución de ΔH ($\Delta H < 0$, reacción exotérmica) para que el proceso sea espontáneo, el aumento de S (o un ΔS positivo) también contribuye a la espontaneidad del proceso. No hay que olvidarse que la temperatura es un factor que da idea de la importancia relativa de la variación de entropía, respecto a la variación de entalpía. A bajas temperaturas ΔH es más relevante, mientras que a altas temperaturas, lo es ΔS.

Influencia de la entalpía y entropía en la energía libre de Gibbs

Condición	ΔH	ΔS	Reacción Procede
1	< 0	> 0	Siempre
2	< 0	< 0	cuando T es baja
3	> 0	> 0	cuando T es alta
4	> 0	< 0	Nunca

La Tabla es un resumen de las posibles combinaciones de ΔH y ΔS. Hay que mencionar en este punto, que no hay seguridad de que una reacción ocurra en un tiempo observable aunque termodinámicamente sea espontánea ya que no hay ninguna predicción sobre las velocidades de la reacción.

Recordemos también que la condición de equilibrio es que $\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 0$ lo que es lo mismo que decir que:

$$\Delta H = T \times \Delta S$$

Los dos términos son, por lo tanto, exactamente iguales en el equilibrio. Si ambos son positivos, la tendencia hacia una mayor aleatoriedad, medida por $T\Delta S$, es suficiente para compensar la naturaleza endotérmica de la reacción ($\Delta H > 0$). Si ambos son negativos, el carácter exotérmico de la reacción sólo compensa la disminución de la aleatoriedad.

Bibliografía consultada

Alonso M, Rojo O. Física. Mecánica y Termodinámica. Fondo Educativo Interamericano SA, 1979.

Katchalsky A y Currant PF. Non-equilibrium Thermodynamics in Biophysics. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1965.

Schultz S. Basic Principles of Membrane Transport, Cap. 1. Cambridge University Press, 1980.

Waser J. Basic Chemical Thermodynamics. WA Benjamin Inc, 1966.

Unidad 4: La Termodinámica de los Seres Vivos
Guía de Ejercicios

1. ¿Qué es la Energía? Sugiera cuál es su origen

2. Identifique diferentes formas de energía

3. Defina energía interna. Dé un ejemplo.

4. Explique el Primer Principio de la Termodinámica.

5. ¿Qué es la entalpía de un sistema? ¿Qué representa su valor para los líquidos y por qué?

6. ¿Qué se quiere decir con propiedades intensivas y extensivas? Dé ejemplos.

7. ¿Qué se entiende por equilibrio termodinámico?

8. Defina procesos reversibles e irreversibles y dé un ejemplo de cada uno.

9. Explique qué es el estado (termodinámico) de un sistema y el de una variable de estado.

10. Defina a la Termodinámica ¿Qué variable de estado es esencial en su definición?

11. Tiene agua en tres estados de agregación, sólido (izquierda), líquido (medio) y gaseoso (derecha). Responda justificando: ¿Cómo es el ΔH (positivo o negativo) asociado a cada transición entre los tres estados de agregación? Suponiendo su paso del estado sólido, al líquido y luego al gaseoso, ordénelos de mayor a menor entropía.

12. Supongamos que quiere estudiar el intercambio de calor entre el interior y el exterior de una casa. ¿Cuál sería el sistema y cuál el entorno en su estudio? ¿Es el flujo de calor entre la casa y el exterior un proceso reversible o irreversible? ¿Hacia dónde fluye el calor, y por qué mecanismos? ¿Qué ocurrirá entre la ΔS_{casa} y la $\Delta S_{exterior}$ con las ventanas cerradas y abiertas? ¿Qué ocurrirá si apagamos la calefacción?

13. Asigne valores de ΔH y ΔS para reacciones hipotéticas con las unidades correspondientes, para obtener: $\Delta G = 0$; $\Delta G < 0$; $\Delta G > 0$. Considere una temperatura de

37°C. Mencione en cada caso si corresponden a reacciones en equilibrio, espontáneas o no espontáneas.

14. ¿Qué cantidad de calor se necesita para calentar 50 g de cobre (Cu) desde 20°C hasta 70°C? (Dato: c_{Cu} = 0,389 J/°C.g)

15. Si se suministran 1.530 calorías a 45 ml de agua a 14°C, ¿cuál será la temperatura final del agua? (Dato: c_{H2O} = 1 cal/°C.g)

16. Una masa de 10 g de hielo recibe calor alcanzando posteriormente una temperatura de 20°C. ¿Qué cantidad de calor recibe el hielo durante dicho proceso? Exprese el resultado en Joules (Dato: c_{H2O} = 1 cal/°C.g y L_f = 80 cal/g)

17. Una kcal de calor eleva la temperatura de 200 g de hierro (Fe) en 46,7°C. Calcular el calor específico del hierro.

18. Calcule el aumento de entropía que acompaña la fusión de 100 g de hielo si la variación de energía libre es - 56,7 cal. (Dato: calor de fusión = 79,8 cal/g).

19. Indique el signo del cambio de entalpía durante la vaporización, condensación, y fusión para el agua.

20. ¿Cuál es el cambio de energía interna (ΔU) para el proceso en donde se entregan 600 J de trabajo a un sistema que va a emitir 250 J de calor?

21. ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema para un determinado proceso donde se añaden 6.000 J de calor al mismo, mientras hace trabajo de expansión equivalente a 9.000 J contra la atmósfera circundante?

22. Defina y escriba la ecuación que define a la energía libre de Gibbs tomando como base las variables temperatura, entropía y entalpía.

23. ¿Cuál de las siguientes relaciones indica equilibrio?

$\Delta G > 0$
$\Delta H = T\Delta S$
$\Delta H_{entorno}/T = 0$
$\Delta U = Q - P\Delta V$
$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$

24. Indique qué cambios de temperatura realizaría para que la reacción sea espontánea

Si tanto ΔH como ΔS son positivas.
Si ΔH es positiva y ΔS es negativa.

Si ΔH es negativa y ΔS es positiva.
Si ΔH es negativa y ΔS es negativa.

25. La reacción $CaCO_3(s) \leftrightarrow CaO(s) + CO_2(g)$ tiene ΔH° = 177,8 kJ/mol y ΔS° = 160,5 J/K · mol. Predecir la espontaneidad de la reacción a temperatura ambiente y a 1.000°C. Nota: Los circulitos indican valores estándar de la reacción, 1 mol de las sustancias, a 1 atm.

UNIDAD 5: Electricidad
Contenidos

Electrostática

Carga eléctrica. Conservación de la carga. Conductores y aisladores. Campo eléctrico. Energía potencial eléctrica. Diferencia de potencial. Relación entre campo y diferencia de potencial. Gradiente de potencial. Capacitores. Energía almacenada. Asociación en serie y en paralelo.

Electrodinámica

Intensidad de corriente eléctrica. Régimen estacionario: corriente continua. Ley de Ohm: resistencia eléctrica. Resistividad. Fuerza electromotriz. Potencia eléctrica. Asociación de resistencias en serie y en paralelo. Circuitos simples. Amperímetro y voltímetro. Seguridad eléctrica.

UNIDAD 5: Electricidad

Electrostática

Las cargas eléctricas

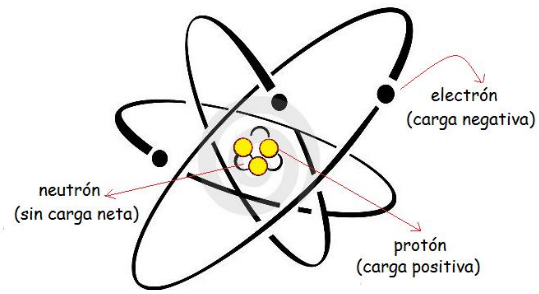
Como la mayoría de los fenómenos físicos, el efecto de las cargas eléctricas se observa cotidianamente. Si ponemos pedacitos de papel sobre una mesa, raspamos una birome contra la ropa o el pelo, y acercamos la birome a los papelitos, veremos que esta los atrae. Algo parecido se observa si frotamos un peine contra el pelo y luego vemos cómo el pelo se mueve hacia el peine cuando lo retiramos. Estas propiedades tienen su origen en las cargas generadas, dado que los objetos quedan cargados al frotarse.

Desde tiempos antiguos, las culturas del Mediterráneo sabían que ciertos objetos, como las barras de ámbar, se podían frotar con una piel de gato para atraer objetos ligeros como las plumas. Tales de Mileto (600 a. C.) hizo observaciones sobre la electricidad estática, de las cuales creía que la fricción era ámbar magnético, en contraste con minerales como la magnetita, que no necesitaba frotar. El tema de la “electricidad estática” seguiría siendo poco más que una curiosidad intelectual por más de 2.000 años, hasta que el científico inglés William Gilbert hizo un estudio cuidadoso, distinguiendo el efecto de la piedra magnética del de la electricidad estática producida frotando el ámbar. Acuñó una nueva palabra latina “electricus” o “como ámbar”, de ἤλεκτρον [elektron], la palabra griega para “ámbar”) para referirse a la propiedad de atraer objetos pequeños después de ser frotada. Esta asociación dio lugar a la palabra “electricidad”, que hizo su primera aparición impresa en 1646.

La **Electrostática** estudia la interacción entre cargas eléctricas en reposo, que, por estar cargadas y a una cierta distancia, ejercen fuerzas unas sobre otras. Para comprender todo esto, comenzaremos por el principio, el átomo.

El átomo

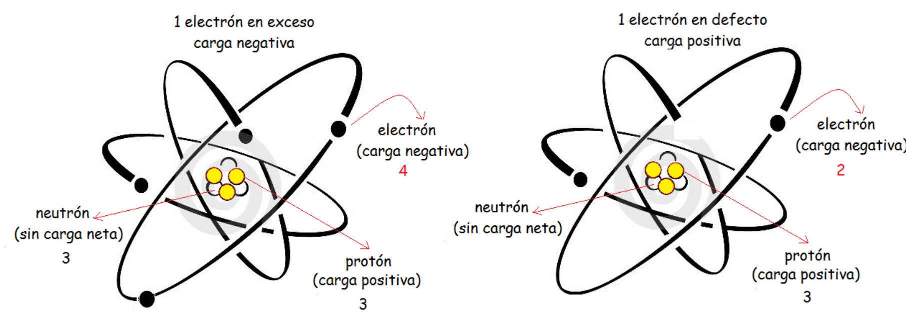
Un átomo es la unidad más pequeña que forma la materia con propiedades de un elemento químico. Los átomos tienen tamaños de alrededor de la diez mil millonésima parte de un metro (en el orden del Ångström, Å = 10^{-10} m). Se han propuesto diferentes modelos atómicos para explicar y predecir su comportamiento.



Cada átomo se compone de un núcleo y uno o más electrones que se mueven alrededor del mismo. El núcleo está compuesto de protones y un número similar de neutrones (o ninguno en el hidrógeno). Los **protones** y los **neutrones** constituyen más del 90% de la masa del átomo. Los **protones** tienen una *carga eléctrica positiva* y los neutrones son neutros (sin carga neta). Alrededor del núcleo se mueven los **electrones** que tienen *carga eléctrica negativa*. En balance, cuando el átomo no está ionizado, la cantidad de electrones y protones es la misma, teniendo carga total cero. Si un átomo tiene más o menos electrones respecto de los protones, entonces tiene una carga global neta negativa o positiva y se lo denomina ión.

Concepto de carga

La carga eléctrica es una propiedad física intrínseca que se manifiesta mediante fuerzas de atracción y repulsión entre ellas por la mediación de campos electromagnéticos.

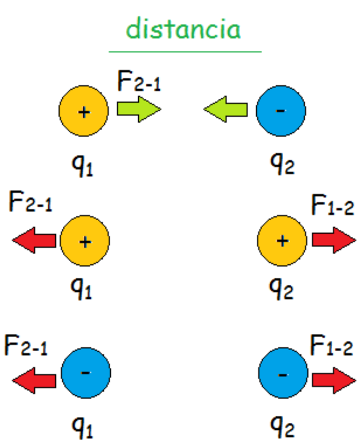


Como dijéramos, existen dos tipos de cargas, que llamaremos "**positivas**" y "**negativas**". Por razones históricas, a las sustancias que poseen un exceso de electrones respecto de los protones se les asigna carga negativa. A las sustancias que tienen un defecto de electrones respecto de los protones se les asigna una carga positiva.

La carga más pequeña es la de un electrón (*e*) y es similar y opuesta a la carga de un protón (ojo!!! No su masa). El valor de la carga elemental es $\boldsymbol{e} = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, donde la C, que acompaña, es la unidad de medida de la carga, llamada Coulomb. Un átomo al que se le adiciona un electrón, se le otorga una unidad de carga negativa (o sea, -1), para dos electrones, -2, y así sucesivamente. Lo inverso por pérdida de electrones, otorga valores +1, +2, ..., +3, etc.

Ley de Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (Físico francés, 1736 - 1806) fue quien determinó las propiedades de la fuerza electrostática mediante la medición de la torsión de una fibra colgada de una barra cargada, como vimos en el ejemplo de la birome. **La ley de Coulomb** describe la fuerza entre dos cargas puntuales en reposo, estableciendo que si existen dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas a una distancia d_{12}, aparecerá una fuerza eléctrica entre ellas.



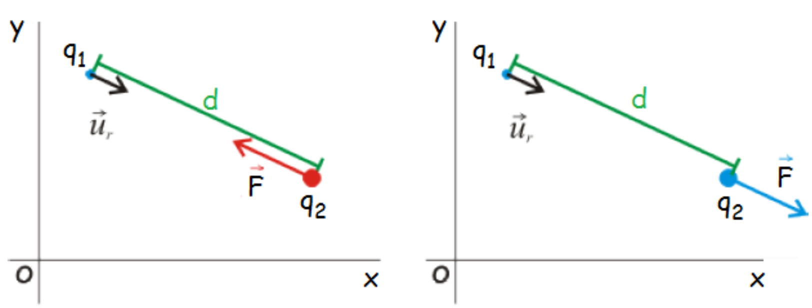
Esta ley establece que la fuerza de interacción entre dos cargas q_1 y q_2 es proporcional al producto de las cargas. Si la distancia entre las cargas es d, al duplicarla, la fuerza de interacción disminuye en un factor del cuadrado de d. En consecuencia, la fuerza de interacción entre dos cargas puntuales es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Introduciendo una constante de proporcionalidad para transformar la relación anterior en una igualdad se obtiene que:

$$\vec{F}_{1\to 2} = k_e \times \left(\frac{q_1 \times q_2}{d_{12}^2} \right) \times \vec{u}$$

Siendo k_e una constante determinada por k_0/ε_r, donde k_0 tiene un valor de 9×10^9 Nm^2/C^2 en el vacío y ε_r es el factor de corrección por el medio en el que se encuentre; y $\vec{u}$ es el vector unitario que indica la dirección de la fuerza. Observe la similitud con la ley de gravitación universal vista previamente. En cuanto a sus unidades:

$$\left[\vec{F}_{1\to 2}\right] = \left(\frac{N \times m^2}{C^2} \right) \times \left(\frac{C_1 \times C}{m^2} \right) = N$$

Donde la fuerza (como para cualquier otro tipo) es medida en Newton (N).



Las cargas de signo opuesto se atraen, y las de igual signo se repelen!!!!

Medio

La magnitud del fenómeno eléctrico depende del medio en el cual se manifieste dicho fenómeno. La intensidad máxima se alcanza en el vacío, tal como lo describe la Ley de Coulomb. Para describir el fenómeno en otros medios basta con corregirla dividiendo por un factor, ε_r (épsilon minúscula, sub-erre), que recibe indistintamente los nombres de constante dieléctrica, o constante de permisividad relativa. En la tabla que sigue, se muestran algunos valores típicos:

Constante dieléctrica a 20°C (ε_r)	
Vacío	1
Aire seco (1 atm)	1,00059
Agua	80
Membrana plasmática (37 °C)	8
Papel	3,5
Plásticos	3-20
Vidrio	5-10

El comportamiento en aire o vacío es prácticamente el mismo, por lo que despreciaremos la diferencia. Los valores para el agua y las membranas plasmáticas (compuestas principalmente por lípidos) tienen gran importancia biológica, especialmente para comprender la actividad eléctrica de las células, y en particular la función nerviosa.

La forma general de expresar la ley de Coulomb es:

$$\vec{F}_e = \frac{k_0}{\varepsilon_r} \times \frac{q_1 \times q_2}{d^2} \times \vec{u}$$

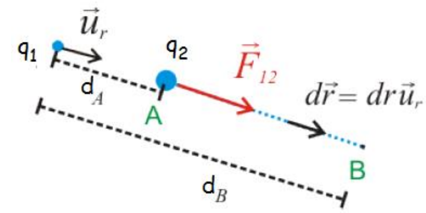
Como toda fuerza, la eléctrica es una magnitud vectorial.

Nota de interés biológico. El axón, que es la prolongación del cuerpo celular de una neurona, cubierto por su membrana plasmática, está a su vez revestido con un aislante llamado mielina. A nivel de la membrana plasmática se producen fenómenos eléctricos que resultan en la transmisión del impulso nervioso. Es gracias a estos procesos que caminamos, pensamos, reímos, comemos y vivimos.

Trabajo de una carga

La **Ley de Coulomb** es formalmente igual a la **Ley de Gravitación Universal** de Newton, que permite calcular la fuerza de atracción entre dos masas. Al igual que esta última, la fuerza electrostática dada por la ley de Coulomb es una fuerza conservativa. Por lo tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria y se puede calcular a partir de una función escalar denominada **Energía Potencial Electrostática** (U). Supongamos que bajo la acción de una fuerza electrostática la carga de prueba q_2 se desplaza desde un punto A, a un punto B, por lo que el trabajo W realizado por la fuerza electrostática será:

$$W_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B$$



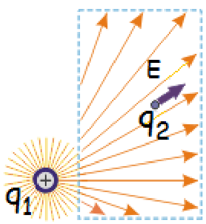
Cuando se encuentra bajo la única acción de la fuerza electrostática, la carga de prueba se moverá siempre en el sentido en el que disminuye su energía potencial ($U_A > U_B$). De forma general se toma como origen para la energía potencial el infinito, de modo que cuando la distancia entre las dos cargas es infinita, la energía potencial entre ambas es nula. La energía potencial de un sistema de dos cargas puntuales q_1 y q_2 que están separadas una distancia d es:

$$U = k\frac{q_1 q_2}{d}$$

donde $k = k_0 / \varepsilon_r$.

Nociones de campo eléctrico

Para comprender el concepto de **campo eléctrico**, veremos un ejemplo. En algún lugar del espacio colocamos una carga. Esa carga "q_1", que en este caso llamaremos carga fuente. El área que nos interesa ver es la marcada en el recuadro azul del esquema. Ahora tomaremos una carga (que llamamos carga exploradora) y le damos el nombre "q_2". Colocaremos a esa carga q_2 en nuestro rectángulo.



¿Qué le ocurrirá a nuestra q_2? Sentirá una fuerza dada por la existencia de q_1. Esta fuerza es "sentida" por q_2, bajo la influencia de q_1 en toda la región del rectángulo. Sabiendo el valor de la fuerza eléctrica (F_e) y el de la carga q_1, podremos definir al **campo eléctrico** como:

$$E = \frac{F_e}{q_2}\ ;\ [E] = \frac{N}{C} = \frac{[Newton]}{[Coulomb]} = \frac{V}{m} = \frac{[Volt]}{[metro]}$$

Así definido, el campo eléctrico es una entidad independiente de la carga con la que se explora el lugar que se describe, dado que el valor de la carga q_2 se cancela. Veamos:

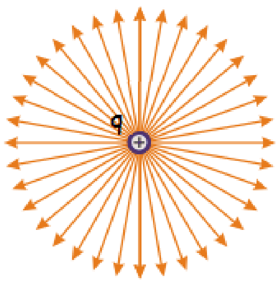
$$E = \frac{F_e}{q_2} = \frac{k_0 \times q_1 \times q_2}{q_2 \times d^2}$$

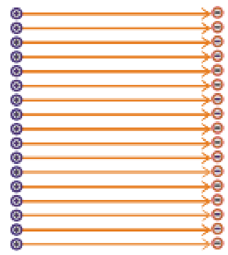
El campo eléctrico E generado por una carga puntual sólo depende de la carga generadora del campo (q_1, la carga fuente) y de la distancia entre ella y el punto en el que estudiamos el campo.

$$E = \frac{k_0 \times q_1}{d^2}$$

Líneas de campo

El campo es una magnitud vectorial. Esto se puede observar en el esquema donde figuran las líneas que describen la configuración geométrica del campo. Estas líneas con sus respectivas flechas constituyen las líneas de campo (*Recuerden que estas líneas son invisibles, no existen, pero tan sólo se muestran para indicar la dirección del campo*). Acá se muestran dos ejemplos de importancia biológica: el campo producido por una carga puntual y el campo uniforme producido por cargas paralelas.





El campo uniforme se produce cuando se tienen dos planos paralelos cargados uniformemente con cargas opuestas. Esto es lo que ocurre en la membrana plasmática de todas las células, que es similar a un capacitor de placas paralelas.

El campo eléctrico uniforme en esta región del espacio se calcula de la siguiente manera:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

donde σ (sigma) es la densidad de carga, que es el cociente entre la carga total que hay en uno de los planos y el área (*A*, o superficie) del plano ($\sigma = q_{total} / A$) y ε_0 es la permisividad del vacío.

$$\varepsilon_0 = (12{,}57 k_0)^{-1}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \times m^2}$$

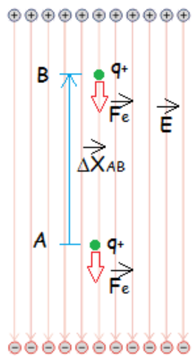
De tal manera que las unidades resultan las de campo eléctrico. Cuando el campo eléctrico no se halla en el vacío, la constante no será ε_0 sino ε_0 x ε_r:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \times \varepsilon_r}$$

Energía potencial eléctrica (E_{pe})

Si una carga se encuentra dentro de un campo eléctrico, adquiere energía, dado que si la soltáramos, comenzaría a moverse impulsada por la fuerza eléctrica.

Si se mueve una carga de prueba positiva, $q+$, en un campo uniforme, E, desde la posición A hasta la posición B (ver diagrama), en contra de la fuerza eléctrica de repulsión que se opone a este movimiento, se estará haciendo un trabajo negativo. Como el campo es constante, la fuerza eléctrica también lo será, de modo que podemos calcular su trabajo con la expresión de trabajo para fuerzas constantes:



$$W_{AB} = F_e \times \Delta x \times \cos\alpha$$
$$W_{AB} = E \times q \times \Delta x \times \cos 180^o$$
$$W_{AB} = -E \times q \times \Delta x$$

Luego de haberse realizado trabajo para mover la carga, la misma tiene más energía que antes. Esta descripción es análoga a la de subir un cuerpo en el campo gravitatorio, cuanto más arriba se encuentre, mayor será su energía potencial gravitatoria (los campos eléctrico y gravitacional funcionan de manera similar!!!).

$$W_{AB} = -(E \times q \times x_B - E \times q \times x_A)$$
$$W_{AB} = -\Delta E_{pe}$$

Potencial eléctrico

El potencial (V) en un punto del espacio debido al campo, E, generado por una carga q, es igual al valor del campo en ese punto por la distancia (d) entre la carga y el punto.

$$V = E \times d$$

Dado que el campo, E, se puede calcular en función de la carga q como $E = \dfrac{k_0 \times q}{d^2}$, entonces

$$V = \frac{k_0 \times q}{d}$$

por lo que se evidencia que, cuanto más cerca nos encontremos de una carga, mayor será el potencial, y cuanto más alejados, menor. A una distancia infinita, el potencial valdrá cero. A través de esta ecuación, también se puede ver que todas las superficies ubicadas a igual distancia de una carga tendrán el mismo potencial, son **superficies equipotenciales**.

Diferencia de potencial eléctrico o Voltaje

Si dividimos la energía por el valor de la carga, la magnitud que obtenemos es el la **diferencia de potencial eléctrico**, que se simboliza como ΔV, donde:

$$\Delta V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = V_B - V_A$$

La unidad en la que se mide la diferencia de potencial eléctrico es el Volt (V), que se relaciona con otras unidades de esta manera:

$$[\Delta V] = V = \frac{J}{C} \qquad 1\,Volt = \frac{1\,Joule}{1\,Coulomb}$$

Nota importante: Con el potencial eléctrico ocurre lo mismo que con la energía. No importa cuánto vale en forma absoluta sino cuánto vale su diferencia con el potencial de otro lugar, por ello que hablaremos habitualmente del ΔV y no de V.

Nota de interés biológico: Las células nerviosas de todos los animales, desde el hombre hasta los calamares, y otras células también llamadas excitables, utilizan súbitas variaciones de la diferencia de potencial eléctrico de su membrana plasmática (potencial de acción) que se auto-propaga por la superficie para transmitir señales.

Electrocinética

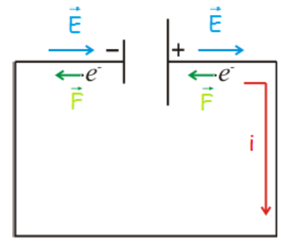
Cuando sobre un conductor se aplica un campo eléctrico, las cargas experimentan una fuerza y por lo tanto se ponen en movimiento. La corriente eléctrica es el flujo de estas cargas en movimiento a través del conductor. La intensidad de corriente eléctrica "*i*" se define como la cantidad de carga eléctrica "*q*" (medida en Coulomb, *C*) que atraviesa el área de un conductor en cada unidad de tiempo. La corriente es una magnitud escalar:

$$i = \frac{q}{\Delta t}$$

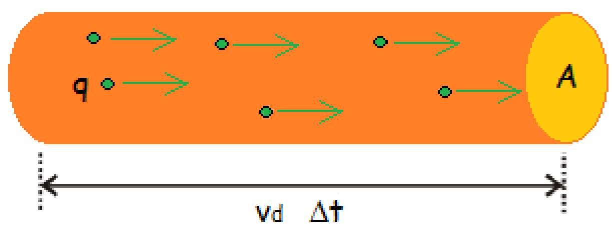
La unidad de corriente eléctrica en el Sistema Internacional es el Ampere (A). La carga eléctrica que está en movimiento (en este caso), son los electrones libres. Estos electrones, experimentan una fuerza dada por la ecuación:

$$\vec{F} = q \times \vec{E}$$

Históricamente se creía que la corriente eléctrica estaba producida por el movimiento de cargas positivas y por ello se adoptó como sentido de la corriente eléctrica el contrario al que en realidad llevan los electrones. Esta convención se mantiene en la actualidad.



En ausencia de campo eléctrico, los electrones (u otros portadores de carga) están en movimiento aleatorio. Sin embargo, bajo la influencia de un campo eléctrico externo, su movimiento no será completamente aleatorio sino que se desplazará en la dirección del campo eléctrico pero sentido contrario. La velocidad a la que lo hacen se denomina velocidad de desplazamiento v_d, que es del orden de 1 mm/s.



Si por un alambre conductor circulan *n* cargas *q* por unidad de volumen, la intensidad de corriente vendrá dada por:

$$I = q \times n \times v_d \times A$$

Los metales permiten la conducción de la corriente eléctrica. Cuando se conecta una pila entre los dos extremos de un cable, la pila obliga a los electrones a moverse provocando la aparición de la corriente eléctrica.

Circuitos eléctricos. Ley de Ohm.

Imaginemos un filamento de un material conductor. Al aplicar entre sus extremos una diferencia de potencial ΔV, circulará por él una corriente eléctrica de intensidad *i* (carga que atraviesa el filamento por unidad de tiempo). Cuando dicho material es un metal, y en otros muchos casos, se observa que la diferencia de potencial ΔV que se debe aplicar para que circule una intensidad *i* es proporcional a dicha intensidad, es decir,

$$\Delta V = i \times R$$

La constante de proporcionalidad *R* se denomina **resistencia**, que es la dificultad que tienen las cargas para atravesar un elemento conductor, y depende del material y de la forma del conductor, pero no de la corriente *i*. Esta ley es la conocida **Ley de Ohm**, en honor al científico alemán Georg Ohm (1787-1854), su descubridor. Esta ley es fundamental en el análisis de circuitos, incluidos los que observamos en células en funcionamiento.

La resistencia de un conductor depende de las características del material, es decir, de su propiedad intrínseca llamada **resistividad**, así como de la longitud y el área del conductor. En un hilo metálico de área transversal *A* y longitud *l*, la resistencia estará dada por la expresión

$$R = \frac{\rho \times l}{A}$$

conocida como **Segunda Ley de Ohm**, donde *R* es la resistencia y su unidad es el Ohm (Ω), rho, ρ, es la resistividad del material y se mide en Ω×m, *l* la longitud del hilo conductor (m) y *A* es el área del hilo conductor (m^2). La resistividad ρ es característica del material y de la temperatura. En el estudio de las soluciones electrolíticas (sales en agua) es más usual la **conductividad** kappa, κ, que es la inversa de la resistividad, y que depende de la viscosidad del solvente, de la temperatura y del tipo de iones diluidos en la solución. Así, tendremos que

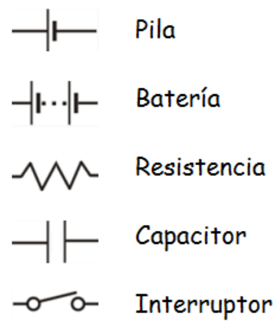
$$R = \frac{l}{\kappa \times A} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\rho}$$

Se acostumbra a utilizar también la inversa de la resistencia, que recibe el nombre de **conductancia**.

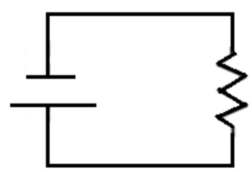
Resistividades a 20ºC de algunos materiales			
Clasificación	Materiales	Aplicación	ρ, Ωm
Buenos conductores	Plata Cobre Aluminio Wolframio Tungsteno Hierro Estaño	Contactos Hilos y cables Chasis y blindaje Filamento incandescente Filamento incandescente Chasis Soldadura	$1{,}59 \times 10^{-8}$ $1{,}67 \times 10^{-8}$ $2{,}65 \times 10^{-8}$ $5{,}52 \times 10^{-8}$ $5{,}60 \times 10^{-8}$ $9{,}71 \times 10^{-8}$ $12{,}0 \times 10^{-8}$
Malos conductores	Carbón Agua de mar Agua potable Agua destilada Agua ultrapura	Resistencias	20-100 0,19 200 10.000 182.000
Aislantes	Baquelita Madera Aire Vidrio	Regletas de conexión Varios Remontar barriletes Aisladores	10^{10} 10^{8}- 10^{11} $(2-4) \times 10^{13}$ 10^{12}- 10^{14}

Representación de elementos de un circuito

Los elementos que componen un circuito se suelen representar de forma muy sencilla. Algunos de los símbolos más utilizados son:

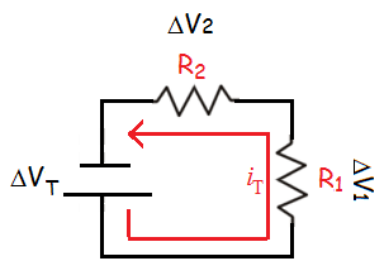


Nótese que en la pila, el polo positivo está representado por la placa de mayor longitud, siendo el polo negativo de menor longitud. Varias pilas conforman una batería. El **capacitor** se representa con dos líneas de igual longitud. Un ejemplo del circuito más sencillo con una resistencia y una pila en serie, sería:



Circuitos en serie

En un circuito en serie las resistencias están conectadas una a continuación de la otra de tal forma que la corriente atraviesa todas las resistencias por igual, siendo la misma en todo el circuito. Además, la diferencia de potencial está aplicada a todas las resistencias, de tal forma que la caída de voltaje total es igual a la suma de las caídas en cada una de las resistencias.



En este tipo de conexión resulta que:

$$\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2 \qquad R_{ES} = R_1 + R_2 \qquad i_T = i_1 = i_2$$

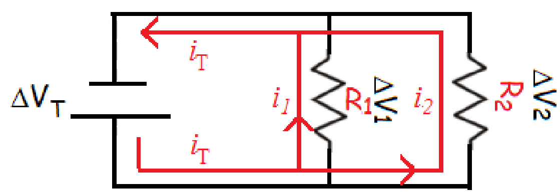
De forma generalizada:

$$\Delta V_T = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_n \qquad R_{ES} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad i_T = i_n$$

Donde R_{ES} es la resistencia equivalente del circuito en serie.

Circuito en paralelo

En un circuito en paralelo, las resistencias están todas conectadas a la fuente de alimentación de forma independiente. En este tipo de circuito, la corriente total se divide para pasar por las resistencias, pero el ΔV es el mismo en todas las ramas del circuito.



En este tipo de conexión resulta que:

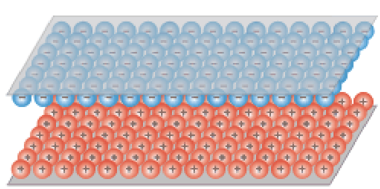
$$\Delta V_T = \Delta V_1 = \Delta V_2 \qquad \frac{1}{R_{EP}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad i_T = i_1 + i_2$$

y de forma generalizada:

$$\Delta V_T = \Delta V_n \qquad \frac{1}{R_{EP}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_n} \qquad i_T = \sum_{i=1}^{n} i_n$$

Capacitores

Los **capacitores** son dispositivos que constan de dos placas paralelas distanciadas. Cada una de las placas acumula cargas opuestas, y debido a que en el medio de las placas hay un medio no conductor (dieléctrico), las cargas opuestas se mantendrán alejadas.



De esta manera se pueden alojar cargas de un mismo signo en cada una de las placas ya que, si bien se repelen intensamente entre ellas, al mismo tiempo van a estar siendo atraídas fuertemente por las de la placa de enfrente.

Un capacitor tendrá más capacidad de albergar cargas cuanto más cercanas estén las placas y cuanto más grande sea el área de las placas. La capacidad de contener cargas, se llama

capacitancia, y se simboliza con la letra *C*, siendo la magnitud eléctrica característica de los capacitores, que está determinada, en principio, por esos dos parámetros: su área, *A*, y su distancia entre placas, *d*.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \times A}{d}$$

donde ε_0 es la **permisividad** del vacío, que funciona aquí como una constante de proporcionalidad. Su valor es:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \times m^2}$$

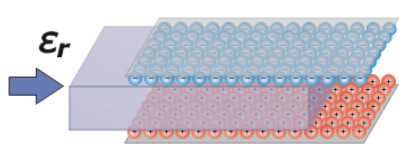
Resulta así que las unidades en las que habrá que medir las capacidades será el Faraday:

$$[C] = \frac{C}{V} = F\ (Faraday), \qquad Faraday = \frac{Coulomb}{Volt}$$

La carga y la capacidad (medida como capacitancia) son directamente proporcionales, ya que si aumenta la capacidad es porque hay más lugar para acumular cargas. Por otro lado, cuanto mayor sea la carga, mayor será la diferencia de potencial entre ellas, ya que mayores serán las fuerzas de repulsión y atracción. Estas dos relaciones básicas se pueden juntar en una única expresión que describe el comportamiento eléctrico de los capacitores:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad Capacitancia = \frac{Carga}{Voltaje}$$

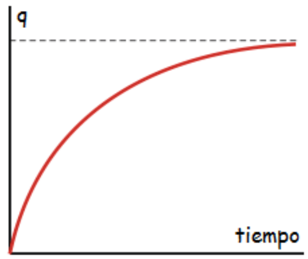
La carga neta de los capacitores siempre es cero dado que siempre tiene tantas cargas positivas de un lado como negativas del otro. Si en el espacio entre las placas colocamos un material aislante cualquiera, la capacidad del dispositivo se modificará. Para corregir el cálculo, bastará con incluir la constante dieléctrica relativa del material, ε_r, junto a ε_0.



$$C = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r \times \frac{A}{d}$$

Ese material aislante que se introduce entre las placas suele denominarse **dieléctrico**. La introducción del dieléctrico aumenta la capacitancia.

Energía en los capacitores



<u>*Los capacitores almacenan energía eléctrica*</u> que después se puede aprovechar para otros fines como por ejemplo el encendido de un aire acondicionado, un tubo de luz fluorescente, o el potencial de acción de una célula nerviosa. En el gráfico se muestra la carga de un capacitor, desde que empieza a cargarse hasta que adquiere la carga completa (*Importante! Una vez cargado el capacitor, no hay más movimiento de cargas por esa rama del circuito, o sea, la corriente eléctrica será cero*).

La diferencia de potencial eléctrico establecida por el capacitor (cargado) es la misma que la de la fuente que cargó al capacitor. La energía almacenada en el capacitor, *U*, se puede calcular como:

$$U = \tfrac{1}{2} \times \frac{q^2}{C}$$

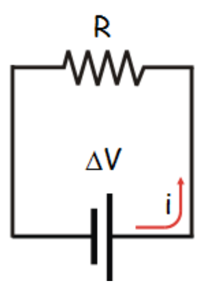
Dado que la carga de los capacitores se puede calcular como: $q = C\,\Delta V$, podemos hallar otras dos expresiones que, en forma equivalente, permiten calcular la energía acumulada.

$$U = \tfrac{1}{2} \times C \times V^2 = \tfrac{1}{2} \times q \times V$$

Nota de interés biológico. La estabilidad de las membranas plasmáticas de las células se logra gracias a la fuerza atractiva de las cargas de sus caras enfrentadas. Es decir, a su capacidad eléctrica. Al igual que con las nubes, separar las capas de la bicapa lipídica requiere que las células vivas realicen un trabajo. Es esperable que la fuerza hidrofóbica de las cadenas lipídicas no alcance para mantener estable la membrana. Existen distintos sistemas de transporte que mantienen ese capacitor activo, y que verán en distintas materias de la carrera de Ciencias Médicas.

Potencia y Energía

Veamos el siguiente ejemplo, que representa al circuito más simple:



La corriente *i* representa la cantidad de cargas que se mueven en un intervalo de tiempo. De allí que:

$$i = \frac{q}{\Delta t}$$

y sus unidades serán el Coulomb/segundo, que se define como Ampere (A). ¡Importante! *En ninguna parte del circuito se crean ni se destruyen cargas, de modo que todo lo que sale por el polo positivo vuelve a entrar por el negativo.* *R* es la resistencia del circuito, el resto de las partes (pila y cables) se considera que tienen resistencia nula. Entre estas tres magnitudes se verifica la Ley de Ohm.

El trabajo de mover cargas implica una disminución de energía que se convierte en otros tipos de energía. El lugar donde se realiza mayoritariamente esta transformación de energía es la resistencia. Para mencionar este fenómeno se ha generalizado el término **disipación de la energía** en la resistencia. Si consideramos el intervalo de tiempo en que ocurre esta transformación, podemos calcular la **potencia eléctrica** (*Pot*), o potencia disipada en la resistencia. El cálculo surge de:

$$Pot = \Delta V \times i$$

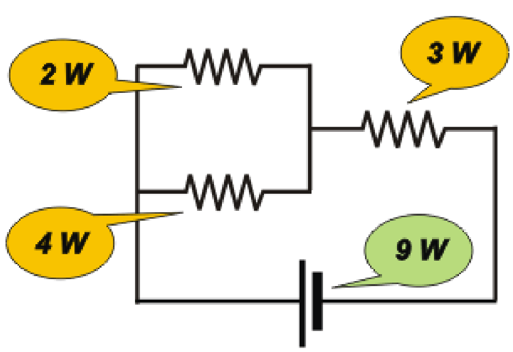
La unidad en la que se mide la potencia, es el Watt.

$$[Pot] = V \times A = \frac{J}{C} \times \frac{C}{s} = \frac{J}{s} = W$$

La potencia eléctrica indica el consumo de energía, y se calcula mediante:

$$Pot = i^2 \times R = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Las potencias disipadas en las resistencias de un circuito se suman entre sí para conocer la potencia total disipada. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo. Las potencias disipadas por las resistencias, sin importar cómo estén agrupadas, suman la misma cantidad que la potencia entregada por la pila.



Las fuentes, pilas o baterías entregan energía, el resto de los elementos, disipan toda la energía en su totalidad (aunque parte de la energía se "pierda" como calor).
El kilowatt-hora, kWh, es una unidad de energía, no de potencia. Tiene un nombre engañoso, se trata del producto entre dos unidades: kilowatt y hora. La primera es

indudablemente de potencia, mil watts; y la segunda de tiempo. El producto de potencia por tiempo, da energía.

$$1\,kW = 1.000\,W \times 1\,h = 1.000\,\frac{J}{seg} \times 3600\,seg = 3.600.000\,J$$

La energía se puede calcular multiplicando la potencia por el intervalo de tiempo:

$$\Delta U = Pot \times \Delta t = \Delta V \times i \times \Delta t = \Delta V \times q$$

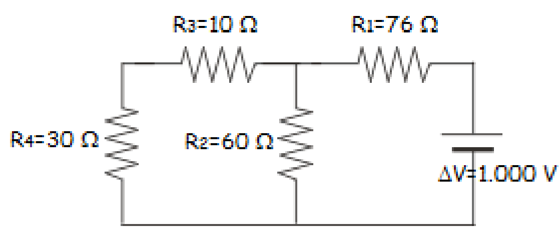
Respecto de las unidades

$$[\Delta U] = V \times C = J$$

Nota importante: El trabajo eléctrico, voltaje por carga, se expresa en Joule, como toda forma de trabajo.

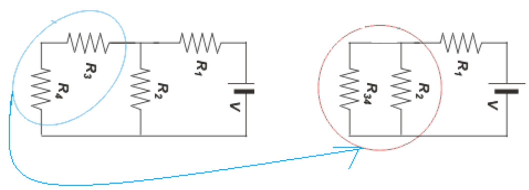
Ejemplos de resolución de circuitos

Dado un circuito eléctrico como el que se muestra a continuación, vamos a calcular la corriente que atraviesa cada resistencia (i_1, i_2, i_3, i_4), la diferencia de potencial a la que está sometida cada una de ellas (V_1, V_2, V_3, V_4) y la potencia que disipa (Pot_1, Pot_2, Pot_3, Pot_4).



Lo primero que se debe hacer es simplificar el circuito a su mínima expresión. Para ello, buscaremos en cada paso un circuito equivalente más sencillo. Para ello, evaluaremos si las resistencias están en serie o paralelo, y así calcular su resistencia equivalente.
¿La resistencia 1 está en serie con la resistencia 3? ¿La resistencia 2 está en paralelo con la resistencia 4? Algunas no son tan sencillas de responder. El par de resistencias del que no cabe duda cuál es su asociación es el par 3 y 4, que están en serie. A ese par y sólo a ese lo reemplazamos por su resistencia equivalente.

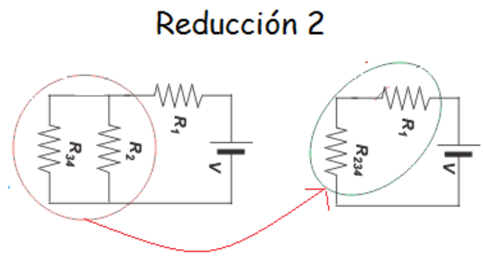
Reducción 1



Y calculamos cuál es el valor

$$R_{34} = R_3 + R_4$$
$$R_{34} = 10\,\Omega + 30\,\Omega = 40\,\Omega$$

En este nuevo circuito reducido, el par de resistencias cuya asociación es segura, son las resistencias 2 y la equivalente 3-4, que se hallan asociadas en paralelo. La reemplazamos:

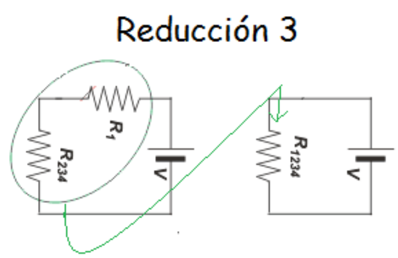


Y calculamos cuál es el valor

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}}$$

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{60\,\Omega} + \frac{1}{40\,\Omega} = \frac{40+60}{2400\,\Omega} = \frac{100}{2400\,\Omega} = \frac{1}{24\,\Omega}$$
$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{24\,\Omega} \Rightarrow R_{234} = 24\,\Omega$$

Todavía queda una reducción más, ahora es claro que las dos resistencias que quedan están asociadas en serie. La reemplazamos.



$$R_{1234} = R_1 + R_{234}$$

$$R_{1234} = 76\,\Omega + 24\,\Omega = 100\,\Omega$$

El circuito que nos quedó es equivalente al primero, pero es el más sencillo que podríamos imaginar: una sola resistencia, una sola corriente y una sola diferencia de potencial.

$$R_1 = 76\,\Omega;\ R_2 = 60\,\Omega;\ R_3 = 10\,\Omega;\ R_4 = 30\,\Omega;\ R_{34} = 40\,\Omega;\ R_{234} = 24\,\Omega;\ R_{1234} = 100\,\Omega$$

Ahora, aplicamos la ley de Ohm y vamos recorriendo el circuito de vuelta (del más simple al más complejo). Sabemos que la diferencia de potencial a la que está sometida la resistencia que llamamos 1234 es la de la pila (ver esquema arriba). La única incógnita que resta en este circuito es la corriente que atraviesa esa resistencia, que no es otra cosa que la corriente total. Así, podemos calcular la corriente total (o i_{1234}) como:

$$i_{1234} = \frac{V}{R_{1234}} \Rightarrow i_T = \frac{V}{R_T} = \frac{1000\,V}{100\,\Omega} = 10\,A$$

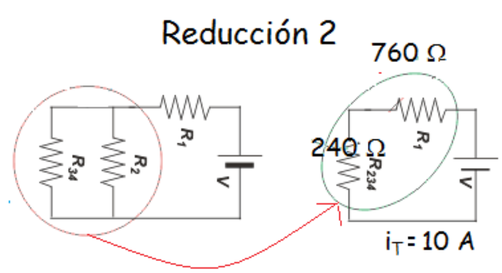
Dado que, si miramos la última reducción del circuito, $i_{1234} = i_1 = i_{234}$, entonces $i_1 = i_{234} = 10$ A. Ahora podemos calcular la ΔV a través de cada una de estas resistencias.

$$V_1 = i_1 \times R_1 = 10\,A \times 76\,\Omega = 760\,V$$
$$V_{234} = i_{234} \times R_{234} = 10\,A \times 24\,\Omega = 240\,V$$

Cada paso que retrocedemos ofrece una oportunidad de revisar el resultado. Como estas resistencias están en serie, la suma de las diferencias de potencial deberá ser igual a la diferencia de potencial total:

$$V_{1234} = V_1 + V_{234} = 760\,V + 240\,V = 1000\,V$$

Vamos un paso más atrás, a la Reducción 2, donde anotamos los datos que calculamos recién:



En un circuito en paralelo, la diferencia de potencial de cada resistencia integrante es igual a la diferencia de potencial de su equivalente. Por lo tanto:

$$V_{234} = V_2 + V_{34} = 240V$$

Queda averiguar la corriente que atraviesa cada resistencia mediante la Ley de Ohm:

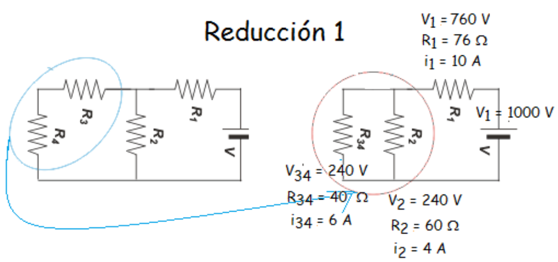
$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{240V}{60\,\Omega} = 4\,A$$

$$i_{34} = \frac{V_{34}}{R_{34}} = \frac{240\,V}{40\,\Omega} = 6\;A$$

Revisamos la suma de las corrientes en las que se divide un circuito en paralelo, que debe ser igual a la corriente que atravesaba la resistencia 34:

$$i_{234} = i_2 + i_{34} = 4\,A + 6\,A = 10\,A$$

Ahora seguimos hacia atrás, revisando la Reducción 1, a la que le agregamos los valores que ya tenemos:



Observando el circuito original, entonces:

$$i_{34} = i_3 + i_4 = 6\,A$$

Y aplicando la ley de Ohm para cada resistencia:

$$V_3 = i_3 \times R_3 = 6\,A \times 10\,\Omega = 60\,V$$
$$V_4 = i_4 \times R_4 = 6\,A \times 30\,\Omega = 180\,V$$

Revisamos que la suma del voltaje resulte en el valor total:

$$V_{34} = V_3 + V_4 = 60V + 180V = 240\,V$$

Finalmente, calculamos las potencias a través de cada resistencia:

$$Pot_1 = V_1 \times i_1 = 760\,V \times 10\,A = 7600\,W$$
$$Pot_2 = V_2 \times i_2 = 240\,V \times 4\,A = 960\,W$$
$$Pot_3 = V_3 \times i_3 = 60\,V \times 6\,A = 360\,W$$
$$Pot_4 = V_4 \times i_4 = 180\,V \times 6\,A = 1080\,W$$

Siendo la potencia total del circuito:

$$Pot_T = V_T \times i_T = 1000\,V \times 10\,A = 10.000\,W$$

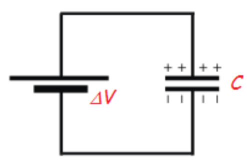
Si sumamos las potencias disipadas por cada resistencia, su valor debe ser igual a la potencia total (toda la energía se transforma, pero no se pierde ni se crea, según el **Primer Principio de la Termodinámica**).

$$Pot_T = Pot_1 + Pot_2 + Pot_3 + Pot_4 = 7.600\,W + 960\,W + 360\,W + 1.080\,W = 10.000\,W$$

Este mismo método es aplicable a circuitos con capacitores, sólo que en vez de utilizar la ley de Ohm, se aplica el principio del funcionamiento de los capacitores: $C = Q/V$. Los capacitores se suman en paralelo, y en serie se suman sus inversas, como veremos a continuación.

Asociación de capacitores

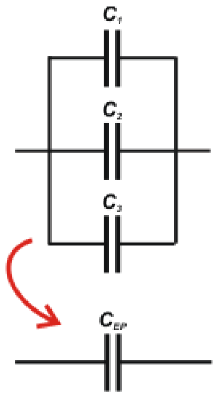
Los capacitores pueden asociarse como las resistencias, en serie o en paralelo. Pero ambas formas recién adquieren sentido cuando el grupo de capacitores asociados está conectado a una pila, o a una batería, o a cualquier otra fuente capaz de suministrarle cargas. Para un único capacitor, el circuito más sencillo posible en el cual adquiere cargas es el que se esquematiza a continuación.



Una vez conectados de esta manera, de los extremos de la pila salen cargas que van a almacenarse en las placas del capacitor hasta que el mismo alcanza una diferencia de potencial igual a la de la pila. Recordemos que entre las placas no podrá haber conducción eléctrica, dado que el medio que las separa no es conductor de cargas (dieléctrico). El proceso de carga puede tardar más o menos dependiendo de las propiedades del capacitor, durante el cual, habrá una corriente que se detendrá en el momento que *C* esté cargado completamente. La placa conectada a la cara positiva de la pila queda definida como positiva y la otra como negativa, y la diferencia de potencial entre las placas será idéntica a la diferencia de las pilas.

Conexión en paralelo de capacitores

Dos o más capacitores están conectados en paralelo cuando sus placas de igual polaridad están conectadas entre sí. Este grupo puede reemplazarse por un único capacitor, capaz de



acumular la misma carga que el conjunto, y que por ello recibe el nombre de capacitor equivalente del paralelo, C_{EP}. El valor del capacitor equivalente se obtiene mediante:

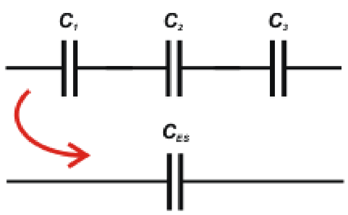
$$C_{EP} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

Cuando un conjunto en paralelo se conecta a una fuente de cargas, todos los capacitores del grupo adquieren la misma diferencia de potencial, $\Delta V_{EP} = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_n$ y la suma de las cargas de cada uno es igual a la carga del capacitor equivalente:

$$q_{EP} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$

El capacitor equivalente de un circuito paralelo siempre tiene más capacidad que el mayor de los capacitores del grupo.

Conexión en serie



Dos o más capacitores están conectados en serie cuando están conectadas entre sí por sus placas de polaridad opuesta. El grupo puede reemplazarse por un único capacitor, capaz de acumular la misma carga que el conjunto, y que por ello recibe el nombre de capacitor equivalente en serie, C_{ES}.

Si se conoce el valor de las capacidades de los capacitores que integran el grupo en serie, puede conocerse el valor inverso del capacitor equivalente sumando las inversas:

$$\frac{1}{C_{ES}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Cuando un conjunto en serie se conecta a una fuente de cargas, todos los capacitores del grupo adquieren la misma carga, $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n$ y la suma de las diferencias de potencial de cada una es igual a la diferencia de potencial del capacitor equivalente:

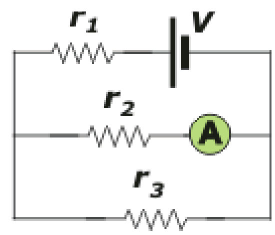
$$\Delta V_{ES} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_n$$

El capacitor equivalente de una serie siempre tiene menor capacidad que el más chico de los capacitores del grupo.

El amperímetro

Como su nombre lo indica este instrumento mide la corriente que pasa por alguna rama del circuito. Su símbolo es:

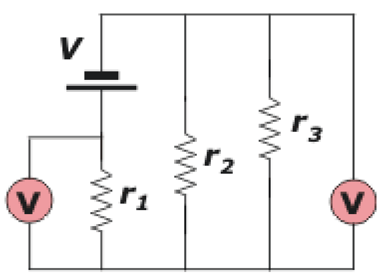
Siempre que esté conectado en serie con una resistencia, podrá medir la corriente que pasa a través de la misma. Por ejemplo:



Para que no afecte la circulación de corriente ni las caídas de voltaje, el amperímetro ideal es aquel de resistencia nula ($R_A = 0$). Como esto no es posible en la práctica, se buscan para su elaboración materiales de resistencia despreciable respecto a las del circuito.

El voltímetro

Este instrumento mide diferencias de potencial. Su símbolo es:



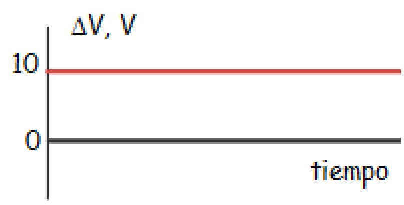
El voltímetro mide la diferencia de potencial que existe entre los dos puntos que toquen sus cables, de modo que para medir una diferencia de potencial cualquiera, basta con apoyar las puntas en los lugares de conexión de cualquier elemento eléctrico de un circuito (una resistencia, una batería, un capacitor). Por ejemplo:

Nótese que los voltímetros se conectan en paralelo a la resistencia a través de la cual se desea medir la diferencia de voltaje. Para que la corriente no pase a través del voltímetro, este deberá tener idealmente una resistencia infinita ($R_V = \infty$). Dado que el valor infinito es inalcanzable, los voltímetros se construyen con las resistencias más altas posibles, para ignorar si presencia.

En la actualidad, amperímetro y voltímetro vienen integrados en un único instrumento llamado **multímetro**. Tienen además otras funciones, entre las que se destaca el óhmetro, que mide valores de resistencias.

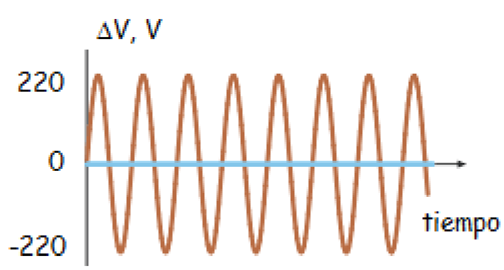
Nociones de corriente alterna

Hasta aquí hemos hablado siempre de lo que se conoce como corriente directa. Por ejemplo, si graficamos la diferencia de potencial de una pila, obtendríamos algo así:

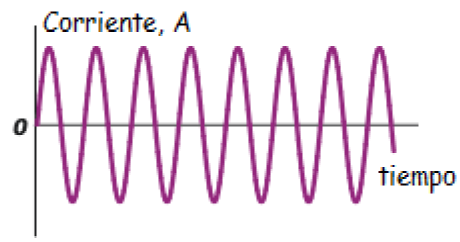


La diferencia de potencial no cambia con el tiempo, es decir es constante.

La red eléctrica que llega a nuestros hogares a través de los tomacorrientes, suministra un tipo de corriente que se llama alterna, justamente porque no es constante. Si graficáramos la diferencia de potencial eléctrico en función del tiempo, obtendríamos lo siguiente:



El gráfico es sinusoidal, es decir que sigue la función seno. Oscila periódicamente unas cincuenta veces por segundo (50 Hertz). La diferencia de potencial, va de 220 V a -220 V. La consecuencia inmediata de esto es que las corrientes eléctricas en una casa son muy diferentes a las generadas con pilas o baterías, donde las cargas (los electrones) viajan siempre en un único sentido. En la corriente eléctrica domiciliaria, las cargas van y vienen todo el tiempo, pero en definitiva se quedan siempre en el mismo lugar. Cuando se prende una lamparita, los electrones vibran en la dirección de los cables. Si graficamos la corriente en función del tiempo, el gráfico resulta enormemente parecido al de potencial.



A este tipo de corriente se la llama corriente alterna, que se simboliza AC (de su nombre en inglés).

Por qué se usa corriente alterna

Cuando alguien toca un cable o un alambre electrificado y es atravesado por la corriente, sus músculos se contraen. Por más voluntad que ponga uno en ordenarle a la mano que suelte el cable, la mano no obedece y la corriente continúa pasando por el cuerpo. Con la corriente alterna el riesgo disminuye enormemente ya que la víctima tiene cien oportunidades por segundo, en que la corriente se hace cero para soltar el cable.

Bibliografía

Alvarenga M. Física General. Ed. Harla, México 1983.

Cabrera R. No me salen. Apuntes teóricos de Física y Biofísica del CBC, UBA. https://ricuti.com.ar/

Coulomb´s Law. https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb´s_law.

Cromer A. Física para las ciencias de la vida. 2º Ed. Reverte, 2007.

Cussó F, López C, Villar R. Física de los Procesos Biológicos. Ariel, 2004.

De Simone I, Turner M. Matemática, Funciones y Probabilidades. A-Z. 2006.

Gettys W, Keller F, Skove M. Física Clásica y Moderna. MacGraw-Hill, 1991.

Jou Mirabent D, Llebot Rabagliati J, Pérez García C. Física para ciencias de la vida. 2º Edición. McGraw-Hill, 2009.

MacDonald DGG, Burns DM. Física para las Ciencias de la Vida y de la Salud. Bogotá, Fondo Educativo Interamericano, 1978.

Lea – Burke-La naturaleza de las cosas. Ediciones Paraninfo. 2001.

UNIDAD 5: Electricidad
Guía de Ejercicios

1. Cuando se disuelve sal de mesa en agua, el NaCl (cloruro de sodio) se disocia en dos partes, cada una cargada por igual: el ión cloruro con carga negativa y el ión sodio con carga positiva. ¿Cuánto vale la carga de cada uno medida en *C*?

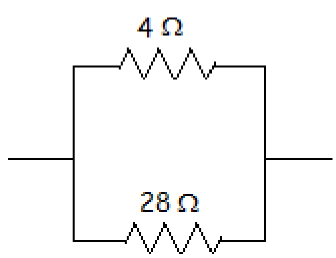
2. La fuerza eléctrica crece cuadráticamente al reducirse la distancia entre los cuerpos cargados. ¿Cuánto vale la fuerza con que se repelen dos protones a una distancia de 10^{-15} m? (aproximadamente el diámetro del núcleo) ¿Cuánta tendrá que ser la fuerza nuclear para los protones se mantengan en el núcleo?

3. ¿Cuánto vale la intensidad del campo eléctrico en una membrana plasmática típica de un axón, si su espesor vale 5 nm y la diferencia de potencial 70 mV?

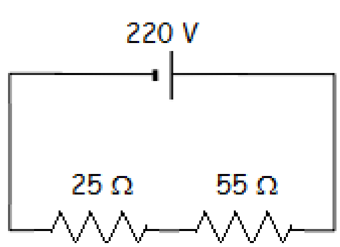
4. ¿A qué se debe la resistencia de los distintos materiales?

5. Se tienen dos cargas puntuales: q_1 = 5 nC y q_2 = -5 nC a una distancia de 1 μm. Esquematizar las cargas y calcular la fuerza creada entre q_1 y q_2.

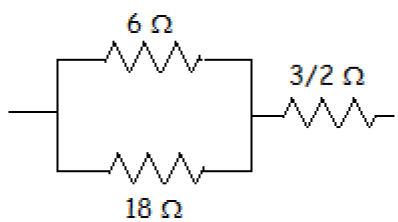
6. Determinar el valor de la resistencia total (R_T) del conjunto de resistencias siguientes:

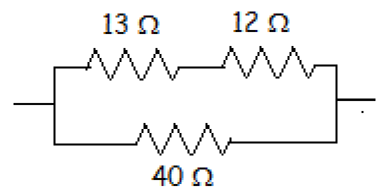


7. Aplicando la Ley de Ohm, determinar la intensidad de corriente (*i*) que circula por el circuito siguiente

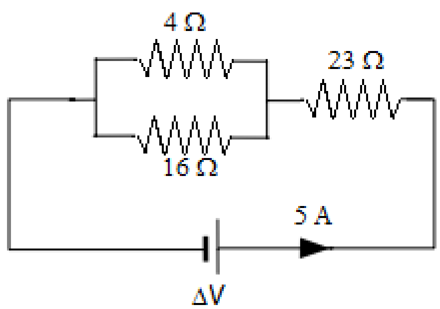


8. Determinar el valor de la resistencia equivalente de los siguientes circuitos:

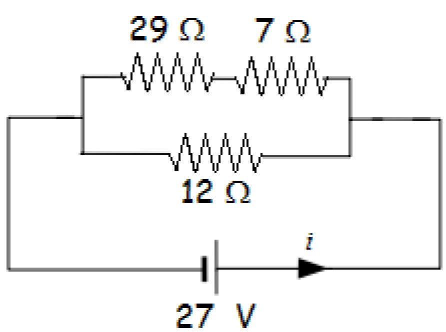




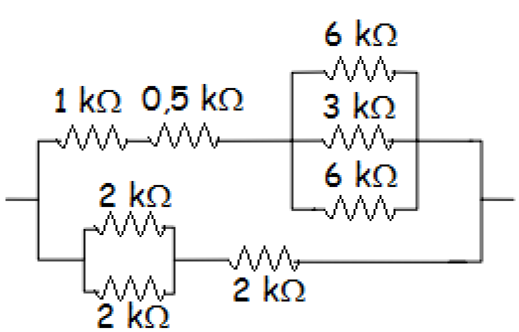
9. Dado el circuito de la figura, calcular el valor del voltaje aplicado (ΔV)



10. Dado el circuito de la figura, calcular el valor de la intensidad de corriente (*i*)



11. Dado el circuito de la figura, calcular la resistencia equivalente



12. Un circuito eléctrico está formado por una lamparita cuya resistencia es de 3 Ω y está alimentada por una fuente de alimentación de 6 V. Calcular la potencia de la bombilla.
13. Calcular la potencia disipada en una resistencia de 6 Ω si la diferencia de potencial entre sus extremos es de 50 V.

14. Se diseña una resistencia de calefacción de 0,5 kW para funcionar a 220 V. ¿Cuál es su resistencia y qué corriente circulará por ella?

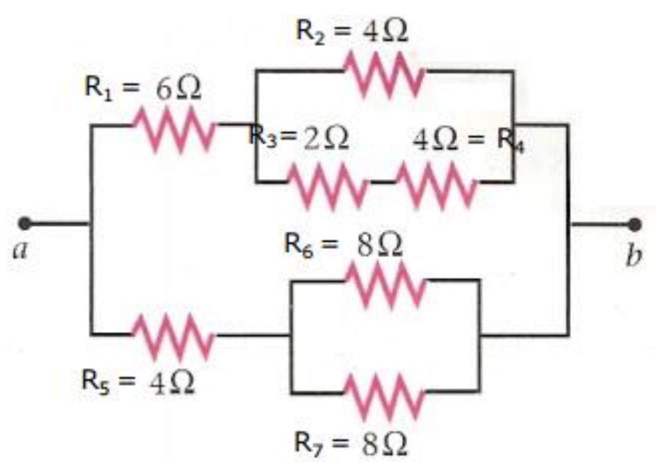
15. Un ventilador se conecta a una tensión de 220 V y consume una intensidad de 0,52 A. Calcular:

a. El valor de la resistencia del ventilador.

b. La potencia consumida en kW.

16. Dos alambres A y B de sección trasversal circular están hechos del mismo metal y tienen igual longitud, pero la resistencia del alambre A es tres veces mayor que la del alambre B. ¿Cuál es la razón de las áreas de sus secciones trasversales?

17. Hallar la resistencia equivalente entre los puntos a y b de la figura.



18. El tercer carril de una vía de tren está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de aproximadamente 55 cm^2. ¿Cuál es la resistencia de 10 km de esta vía? (ρ = 10×10^{-8} Ωm).